РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 2980—3535 **№ 7** **Июль 1955 г.**

SLOVANSKÁ KNIHOVNA PRAHA odd. přírodních

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

2980. Крепнут международные связи ученых. Несмеянов А., Известия, 31 декабря, 1954, № 310, 3

2981. Великий праздник китайского народа. Несмеянов А. Н., Вестн. АН СССР, 1954, № 10, 5—7

2982. Наука в новом Китае. Го Можо, Вестн. АН СССР, 1954, № 10, 8—16

2983. Доклад о задачах и работе отделения физико-математических наук. Хайош, Ковач, Калмар, Алексич (Reszámoló az osztály munkájáról és feladatairól. Hajós György, Kovács István, Kalmár László, Alexits György), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 3, 303—315 (венг.)

2984. Немецкая наука на новом пути. Фридрих В., Вестн. АН СССР, 1954, № 10, 19—24

2985. Отчет Отделения 3 за второе полугодие 1953 г, (Sprawozdanie Wydziału III za II połrocze 1953 r.). Sprawozd. czynności i prac., 1954, 2, 119—208 (польск.)

Приведены данные о работе отдельных институтов Польской академии наук, в частности — математического, о планах научно-исследовательских работ, о подготовке кадров, издательской деятельности, научных съездах и пр.

2986. Пути развития высшего образования. Виноградов Н. И., Вестн. высш. школы, 1954, № 11, 57—59

2987. Подготовка математиков в Дрезденской высшей технической школе. Гнеденко Б. В., Вестн. высш. школы, 1954, № 11, 59—61

2988. Математический институт (Университет в Грейфсвальде). Ринов (Mathematisches Institut (Universität Greifswald). Rinow W.). Wiss. Z. Univ. Greifswald. Math.-naturwiss. Reihe, 1953/1954, 3, № 4/5, 325 (нем.)

Приводятся сведения о научной деятельности и докладах сотрудников Института, а также перечень их работ, опубликованных в 1953 г.

2989. Заседания Московского математического общества. Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 215—244

Сообщается о докладах, прочитанных на заседаниях Московского математического общества:

29 декабря 1953 г. Ф. И. Франкль, К основам квантовой механики. М. Г. Крейн, Теория спектральных и переходных функций одномерных краевых задач и ее приложения.

9 февраля 1954 г. Ю. Б. Румер, Пространство, время, действие. Г. А. Фрейман, К вопросу о разбиении чисел на неограниченное число слагаемых.

16 февраля 1954 г. С. Б. Стечкин, Неравенства для средних. М. М. Джрбашян, Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций. Э. С. Цитланадзе, Об одной задаче условного экстремума в гильбертовом пространстве.

23 февраля 1954 г. Е. Б. Дынкин, Теория групп Ли и топология в расслоенных пространствах.

2 марта 1954 г. А. А. Марков, О непрерывности конструктивных функций. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, К теории пространств Орлича. В. М. Глушков, Нильпотентные локально бикомпактные группы.

16 марта 1954 г. О. А. Ладыженская, О постановке и решении задач диффракции.

23 марта 1954 г. В. С. Королюк, Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова. А. О. Гельфонд, Многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля вместе со своими производными.

30 марта 1954 г. О. А. Олейник, О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций. А. Г. Витушкин, Решение некоторых задач, связанных с 13-й проблемой Гильберта. Е. М. Ландис, О множестве точек существования бесконечной производной.

6 апреля 1954 г. С. Л. Соболев, Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений. С. С. Войт, Распространение звука в изотермической атмосфере. М. М. Вайнберг, О некоторых свойствах интегральных квадратичных форм в пространствах L^q ($q \leqslant 2$).

20 апреля 1954 г. Б. Л. Лаптев, Производная Ли в пространстве опорных элементов. Р. А. Александрян, О спектре смешанной задачи для одной системы типа Соболева. М. С. Агранович, О совместности некоторых методов суммирования.

2990. Борьба материализма с идеализмом в теории вероятностей. Майстров Л. Е., Наука и жизнь, 1954, № 4, 43—45

2991. Некоторые количественные аспекты истории. Рашевский (Some quantitative aspects of history. Rashevsky N.), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, № 3, 339—359 (англ.)

В «развитие» идеалистической попытки автора (РЖМат, 1955, 1585) объявить основным движущим фактором истории распространение идей, возникающих у ничтожного меньшинства общества, и приписать в

M 78249 + 2.

связи с этим особое значение урбанизации, строится математическая модель возможного механизма образования первых городов и «намечается подход к математическому изучению образования социальных и экономических классов в раннем обществе» (стр. 339). Антинаучность исходных посылок автора достаточно ясна уже из того, что частная собственность на землю предполагается уже у первых земледельцев (стр. 341), а сельский кузнец трактуется как «предприниматель», нанимающий такое число рабочих, которое обеспечивает ему максимальную прибыль (стр. 353).

С. А. Яновская

2992. Использование индукции в доказательствах существования. Мойс (The use of induction in existence proofs. Moise E. E.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 3, 192—193 (англ.)

Заметка касается методических вопросов. Высказывается мнение, что доказательства существования последовательностей в курсе математического анализа, использующие индукцию, должны проводиться со всеми подробностями (обычно опускаемыми в силу очевидности), чтобы подготовить слушателей к восприятию более сложных теорем, касающихся трансфинитных чисел и использующих трансфинитную индукцию. Приведены примеры таких доказательств. А. Л. Лунц

См. также: 3003, 3024 К

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

2993. Мотивы и направления в математике. Фулмер (Motives and trends in mathematics. Fulmer H. K.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 3, 157—160 (англ.)

2994. Ассиро-вавилонская математика. Жемона (La matematica assiro-babilonese. Geymonat Ludovico), Illustr. scient., 1954, **6**, № 52, 20—23 (итал.)

Реферат двух статей М. Адамо, помещенных в Rend. Seminar. Fac. Sci. Cagliari. Кроме изложения работ Нейгебауера и Тюро-Данжена, автор пытается выявить связь между вавилонской математикой и искусством, устанавливая четыре способа изображения фигур: скульптурное, изображение при помощи ортогональных проекций, при помощи центральных проекций и при помощи смешанных проекций (фигуры помещаются в несколько рядов, лица изображаются в профиль, а корпус en face и т. д.). Изложение автора не позволяет убедиться, насколько правильной и даже исторически верной является теория Адамо. И. Н. Веселовский

2995. Измерение круга. Гриджман (Circumetrics. Gridgeman N. T.), Scient. Monthly, 1953, **77**, № 1, 31—35 (англ.)

Краткий исторический очерк, посвященный вычислению числа π. Приводя различные приближенные значения для π, дававшиеся учеными Греции, Китая и Индии, автор указывает на более точные методы вычисления π, появившиеся в XVI в. и позднее, и называет ряд вычислителей π. Последним в XIX в. был Шанкс, опубликовавший в 1873 г. 707 знаков π, причем только в 1946 г. было замечено, что лишь первые 530 знаков верны. В 1948 г. Фергусоном и Ренчем было получено 808 знаков, а в 1949 г. с помощью машины ЭНИАК были вычислены 2035 знаков.

В конце статьи рассматриваются вероятностные методы получения приближенного значения π как среднего из ряда испытаний, а также указывается на наличие с давних пор маниаков, пытающихся получить для π новое значение из теологических и прочих соображений. В их числе назван д-р Гудуин, проведший в конце прошлого века в законодательном собрании штата Индиана (США) закон, сводившийся к тому, что π равно 3,2 (через 9 дней закон был отменен сенатом).

К. А. Семендяев

2996. Исследования Го Шоу-цзиня в области тригонометрии и другие его открытия. Сюй Чуньфан (郭守敬的三角術研究和其他發明. 許莼舫), 科學大衆. (Кэсюэ дачжун), 1954, № 5, 182—184 (кит.)

Статья кратко характеризует творчество китайского математика, астронома и мелиоратора Го Шоу-цзиня (1231—1316 гг. н.э.), написавшего 14 научных трактатов. В статье разбирается работа «Учение о календаре» («Шоу ши ли»), выполненная к 1281 г., где дан исправленный, приведенный в систему лунный календарь, которым успешно пользовались в Китае последующие 300—400 лет. Здесь же даны таблицы, похожие на нынешние таблицы тригонометрических функций, однако они неполны и не очень точны.

В статье подробно разобрано решение следующей задачи: по данному диаметру небесной сферы, наклонению эклиптики к экватору, дополнению долготы по эклиптике найти дополнение долготы по экватору и широту некоторой точки, взятой на эклиптике. Решение Го Шоу-цзинем этой задачи, исходящее из приближенной формулы длины дуги сегмента, теоремы Пифагора и подобия треугольников, эквивалентно, по мнению автора, выводу формул

$$\sin b = \frac{\sin c \cdot \cos A}{\sqrt{\sin^2 c \cdot \cos^2 A + \cos^2 c}}; \quad \sin a = \sin c \cdot \sin A,$$

где A — наклонение эклиптики к экватору, a — широта данной точки, b — долгота по экватору, c — долгота по эклиптике, a, b, c — стороны сферического треугольника.

Второй вопрос, рассматриваемый в статье, посвящен вычислению суммы n членов последовательности $a,\ a+b,\ a+2b+c,\ a+3b+3c,\ a+4b+6c, \ldots$, на основании которой Го Шоу-цзинь составил таблицу поправок к календарю. Вычисление производится по формуле

$$S_n = na + \frac{(n-1)n}{2} b + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} c$$

на основании схемы Цзя Сяня (Сунская династия) для коэффициентов разложения бинома Ньютона $(x+y)^n$.

В этой же работе приводится довольно точное значение года в сутках: 365,2425..., вычисленное Го Шоу-цзинем (ошибка составляет 26″). Отмечается, что Го Шоу-цзинь сконструировал и усовершенствовал несколько астрономических приборов. Э. И. Березкина

2997. Некоторые аспекты научной жизни Италии в эпоху Возрождения. Сердческу (Quelques aspects de la vie scientifique en Italie au temps de la Renaissance. Sergescu P.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, **60**, 101—113 (франц.)

2998. Максимумы и минимумы в переписке Э. Торричелли и М. Риччи. Агостини (Massimi e minimi nella corrispondenza di E. Torricelli con M. Ricci. Agostini Amedeo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 629—632 (итал.)

В переписке Э. Торричелли (1608—1647) с итальянским математиком М. Риччи (1619—1681) и другими уче-

ными за 1644—1646 гг., опубликованной в III томе «Opere di Evangelista Torricelli» (Faenza, 1919), имеется решение ряда задач на экстремумы, частью поставленных французскими математиками. Среди этих задач интересны: 1) разделить данный отрезок на части так, чтобы произведение их данных степеней было наибольшим и 2) в плоскости треугольника *ABC* найти точку, сумма расстояний которой от трех вершин — наименьшая (так называемая точка Торричелли). Автор отмечает, что доказательства Торричелли и Риччи имеют чисто геометрический характер; разбор этих доказательств не приведен. А. П. Юшкевич

2999. Московская математико-навигацкая школа. Сергеев В. К., Вопр. географии, 1954, № 34, 150—160

Очерк истории Математико-навигацкой школы, существовавшей в Москве с 1701 по 1752 г. До создания Морской академии в Петербурге (1715г.) Математико-навигацкая школа состояла из подготовительной Математической школы и старшей — Навигацкой школы, а затем функционировала в составе одной Математической школы. Изложение опирается на материалы, публиковавшиеся ранее. А. П. Юшкевич

3000. Об истории непрерывных дробей. Итар (Sur l'histoire des fractions continues. Itard Jean), Rev. gén. sci. pures et appl., 1954, **61**, № 1—2, 5—18 (франц.)

Популярный очерк истории учения о непрерывных дробях до эпохи Эйлера и Лагранжа (работы последних почти не затронуты).

3001. Исторические этюды. XXIX. О кривых и поверхностях высшего порядка. (Продолжение). Врис (Historische Studiën XXIX. Over hoogere kromme lijnen en oppervlakken. (Vervolg). Vries H k. d e), Nieuw tijdschr. wiskunde 1953/54, **41**, № 4, 237—244 (голл.)

Рассматриваются свойства конфигурации точек перегиба плоской кривой третьего порядка и на этом материале показываются методы алгебраической геометрии XVIII—XIX вв. (Маклорен, Плюккер, Гессе, Штейнер). Г. К. Энгелис

3002. Торрес Кеведо. Механизация вычислений и автоматика. Пуч-Адам (Torres Quevedo. — El cálculo mecánico y la automatica. Puig Adam D. Pedro). Rev. Real. acad. cienc. exact. fís, y natur. Madrid, 1953, **47**, 11—28 (исп.)

Доклад на заседании Академии наук Испании, посвященный столетию со дня рождения математика и механика Торреса Кеведо, бывшего долгое время президентом Академии.

Рассматриваются работы Т. Кевено по механизации вычислений и автоматике. Помимо известного механического прибора для решения алгебраических уравнений, Т. Кеведо сконструировал прибор для решения дифференциальных уравнений, опередив Буша на 25 лет. (Автор не указывает, однако, что еще раньше прибор для той же цели был построен А. Н. Крыловым).

Т. Кеведо принадлежит также вычислительная электромеханическая машина, позволяющая по ходу вычислений записывать числа и знаки производимых над ними действий. Автоматизация деления на этой машине, по мнению докладчика, близка по идее к схемам управления современных автоматических быстродействующих машин.

В теоретических работах Т. Кеведо по автоматике имеется ряд соображений общего характера, частично предвосхищающих некоторые идеи кибернетики, например возможность построения автомата, выполняющего «мыслительные» функции, сдающего экзамены. При этом Т. Кеведо подчеркивает, что автомат может лишь показывать вложенные в него заранее мысли своего конструктора.

Т. Кеведо был построен также автоматический шахматист, играющий белым королем и ладьей против черного короля.

Отмечается, что Т. Кеведо был одним из последних представителей изобретателей-одиночек и что в настоящее время крупные изобретения могут быть успешно реализованы только совместными усилиями коллектива. К. А. Семендяев

3003. К истории развития преподавания математики и естествознания. Рау (Zur Entwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Rau Heinz), Math.-phys. Semesterber., 1953, **3**, № 3/4, 238—249 (нем.)

Обзор развития преподавания математических и естественно-научных предметов в немецких средних школах (главным образом Пруссии и земли Нижняя Саксония) за последние 50 лет. Автор приходит, в частности, к выводу, что за этот промежуток времени в преподавании собственно математических предметов значительно улучшилась методика и стала учитываться роль математики в общем развитии учащихся, однако сократилось количество часов, отводимых математике. Это привело в конечном результате к «достойному сожаления общему упадку уровня школ второй ступени». В. И. Левин

3004. Лаплас. Ньюман (Laplace. Newman James R.), Scient. Amer., 1954, **190**, № 6, 77—81 (англ.)

Биографическая заметка, в основном посвященная научной биографии Лапласа, его трудам по небесной механике и теории вероятностей. Приводятся факты из личной жизни Лапласа, характеризующие его как человека и общественного деятеля. Отмечается, что многие подлинные документы, относящиеся к жизни и научной деятельности Лапласа, погибли при пожаре 1925 г., уничтожившем дом одного из потомков Лапласа, и при бомбардировке Каэна во время второй мировой войны. Ф. В. Широков

3005. Академик Николай Митрофанович Крылов. (К 75-летию со дня рождения). Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 1, 3—4

Краткий очерк научной деятельности юбиляра.

3006. Константин Александрович Торопов. Столяров Н. А., Матем. в школе, 1955, № 1, 70—71

К 20-летию со дня смерти известного русского математика-педагога проф. К. А. Торопова (1860—1933).

3007. Нельс Йоханн Леннес. Монтгомери, Веблен (Nels Johann Lennes. Montgomery Deane, Veblen Oswald), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, **60**, № 3, 264—265 (англ.)

Некролог математика Н. Й. Леннеса (родился 15 июня 1874 г. в Норвегии; умер 21 ноября 1951 г. в США). Приложен список печатных научных работ.

3008. Ломоносов и Славяно-греко-латинская академия. Зубов В. П., Тр. Ин-та истории естествозн. и техники АН СССР, 1954, **1**, 5—52

3009. Труды Рихарда фон-Мизеса (1883—1953). Франк (The work of Richard von Mises: 1883—1953. Frank Philipp), Science, 1954, **119**, № 3102, 823—824 (англ.)

Краткая характеристика естественно-научных и философских взглядов Рихарда фон-Мизеса. Подчеркивается большое внутреннее единство его творчества. Ф. В. Широков

3010. Конрад Мюллер. Квade (Conrad Müller. Quade W.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1954, **57**, № 1, 1—5 (нем.)

9 января 1953 г. на 74 году жизни умер специалист по истории математики Конрад Мюллер, принимавший активное участие в издании «Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften». Л. А. Стебакова

3011. К столетию со дня рождения Сальваторе Пинкерле. Натуччи (Nel primo centenario della nascita di Salvatore Pincherle. Natucci Alpinolo), Giorn. mat. Battaglini, 1954, 82, № 1, 335—342 (итал.)

Статья представляет собой публикацию сообщения о жизни и творчестве итальянского математика С. Пинкерле (1853—1936), сделанного Натуччи на VII Международном конгрессе по истории науки в начале августа 1953 г.

3012. Отто Кас. Серё (Otto Szász. Szegö Gabor), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 3, 261—263 (англ.)

Некролог венгерского математика О. Каса (1884—1952). Приведен перечень печатных работ Каса и краткие характеристики некоторых из них.

3013. Альбер Шатле. Дюбрей (M. Albert Châtelet. Dubreil P.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1954, 61, № 5—6, 184—185 (франц.)

Краткий очерк научной деятельности французского математика Альбера Шатле, являющегося организатором и президентом Международного коллоквиума по алгебре и теории чисел, а также президентом Французской ассоциации содействия развитию науки.

Л. А. Стебакова

3014 К. Леонардо да Винчи и научный опыт в XVI веке (Léonard de Vinci et l'expérience scientifique au XVI siècle. VIII+276 p., fig., Centre national de la recherche scientifique, Paris, (Vendôme, Impr. des Presses universitaires de France), 1953, 1500 fr.) Bibliogr. France, 1954, 143, ч. 1, № 6, 127 (библ.

3015 К. Краткая история математики. Строй (A concise history of mathematics. Struik Dirk Jan, XIX + 299 pp., London, Bell, 1954, 14 s.) Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 234, 10 (библ.)

3016 К. История сопротивления материалов. С кратким обзором истории теории упругости и теории сооружений. Тимошенко (History of strength of materials. With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. Timoshenko Stephen P. X + 452 pp., New York Toronto-London. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1953, 10.00 doll.) (англ.)

3017 К. История числа. Сердженеску (Histoire du nombre. Sergesku Pierre, 44 pp., Alençon Imp. alençonnaise, 1953, 130 fr.) Bibliogr. France 1954, 143, part 1, № 8, 176 (библ.)

3018 Д. Принципы и методы геометрии у Лейбница Лаутер (Die Prinzipen und Methoden der Geometrie bei Leibniz. Lauter J. Diss., Technische Hochschule. Aachen, 1953), Z. Vereines dtsch. Ingr., 1954 96, № 4, 110 (библ.)

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

3019. Неразрешимая проблема в алгебре таблиц истинности. Калицкий (An undecidable problem in the algebra of truth-tables. Kalicki Jan), J. Symbolic Logic, 1954, 19, № 3, 172—176 (англ.)

Пусть S_1 и S_2 — два рекурсивных класса формул исчисления высказываний, каждый из которых замкнут относительно операции подстановки. Доказывается невозможность алгоритма, применимого к любой паре таких классов и устанавливающего, состоят ли они из одних и тех же формул или нет.

Б. А. Трахтенброт

3020. Приложения теоремы Лёвенгейма — Сколема — Тарского к проблемам полноты и разрешимости. Вот (Applications of the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability. Vaught Robert L.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 4, 467—472 (англ.)

Автор из теоремы полноты Гёделя (каждая непротиворечивая теория со стандартной формализацией имеет модель) и теоремы Лёвенгейма — Сколема — Тарского (теория со стандартной формализацией, имеющая, по крайней мере, одну бесконечную модель, имеет модель любой бесконечной мощности) в качестве немедленных следствий получает для теорий со стандартной формализацией условие полноты и условие разрешимости.

Условие полноты. Теория со стандартной формализацией полна, если все ее модели бесконечны и она категорична в какой-нибудь бесконечной мощности (т. е. любые ее две модели этой мощности изоморфны).

Условие разрешимости. Если, кроме того, такая теория аксиоматизируема, то она разрешима.

Автор приводит несколько примеров применения своих теорем к конкретным математическим теориям (порядковых типов, булевых алгебр, абелевых групп, алгебраически замкнутых полей).

В заключение он приводит сравнение своего метода и метода элиминации кванторов. Ю. А. Шиханович

3021. Некоторые формальные доказательства относительной непротиворечивости. Мак-Ното (Some formal relative consistency proofs. McNaughton Robert), J. Symbolic Logic, 1953, 18, № 2 136—144 (англ.)

Пусть S — формальная система в обозначениях теории типов (допускается, что все ее переменные имеют тип 1), пусть '$=$' содержится в S; S'—система, получающаяся присоединением к S: 1) новых переменных $\alpha, \alpha', \ldots$ 2) аксиом свертывания, в виде замыканий формул $(\exists\alpha)(\beta)(\beta \in \alpha \equiv \varphi)$, где β—переменная наивысшего типа из S, φ—любая формула из S', не содержащая α, 3) аксиом объемности в виде замыканий формул $\beta = \beta' \supset (\alpha)(\beta \in \alpha \equiv \beta' \in \alpha)$ и 4) распространением на S' аксиом и правил исчисления высказываний и теории кванторов. Средствами теории типов третьей степени T_3 доказывается, что из непротиворечивости S следует непротиворечивость S' (доказательство основано на применении теории истинности Тарского и теоремы Сколема—Лёвенгейма). Каждое предложение S, доказуемое в S', доказуемо в S. Системы T_n и I_n совпадают с описанными ранее (РЖМат, 1954, 4328), но только T_1 есть арифметика (при этом аксиома индукции для I_1 и дальнейших I_n должна содержать переменных типа выше 1; аксиомы равенства для индивидуумов первого типа в I_n и T_n является $(x_1)(y_1)(x_1 = y_1 \supset \cdot F(x_1) \equiv F(y_1))$, где $F(x_1)$ — любая формула из T_n). Непротиворечивость каждой из доказывается в T_3, а I_ω — в T_4 (ср. РЖМат, 1954, 4328).

Доказывается результат Новак (непротиворечивость S'' относительно S, где S'' отличается от S', описанных выше, недопущением связанных переменных $\alpha, \alpha', \ldots$ в φ) средствами T_2 (в настоящее время известно финитное доказательство теоремы Новак, см. РЖМат, 1954, 1072).

В I_n можно ввести такой тип «числовых» переменных

что для него можно построить арифметику, в схеме индукции которой будут допускаться любые связанные переменные из I_n; область изменения этих переменных будет частью области изменения индивидуумов $x_1, y_1, \ldots$ Показывается, что I_2 и T_2 имеют одинаковую силу.

А. С. Есенин-Вольпин

3022. Решение проблемы Хенкина. Лёб (Solution of a problem by Leon Henkin. Löb Martin Hugo), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 405—406 (англ.)

Хенкин (J. Symbolic Logic., 1952, 17, № 2, 160) поставил следующий вопрос: является ли доказуемой формула, выражающая свою собственную доказуемость в формальных системах типа тех, для которых доказывается гёделевская теорема о неполноте.

В применении к общему типу таких систем, охватывающему систему Z_μ Гильберта — Бернайса, автор дает положительный ответ на этот вопрос.

А. С. Есенин-Вольпин

3023. Формальные системы и языки. Керри (Les systèmes formels et les langues. Curry Haskell B.), Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, № 26, Paris, 1950, 1—9; discussion, p. 9—10. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953) (франц.)

Автор обсуждает вопрос о соотношениях между «формальной системой» и «языком». Формальная система является индуктивно определенным классом предложений. Следует различать представление и интерпретацию формальной системы. В представлении системы происходит замена ее предметных переменных объектами какого-нибудь класса; при интерпретации же предикаты заменяются так, что теоремы переходят в истинные предложения. Для каждой формальной системы имеется язык и метаязык. Метаязык является также формальной системой, теоремы которой как метатеоремы следует отличать от эпитеорем (Epitheoreme). Всякая метатеорема переходит посредством интерпретации в эпитеорему, однако не все эпитеоремы можно получить таким образом.

P. Lorenzen

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 3, 100.

3024 К. Приложения математической логики в науке. Труды 2-го Международного коллоквиума по математической логике (Applications scientifiques de la logique mathématique, actes du 2 Colloque international de logique mathématique, 177 p., fig. Paris, Gauthier-Villars, 1954, 2200 fr.), Bibliogr. France, 1954, 143, part. I, № 46 , 1013 (библ.)

См. также: 2289, 3119, 3441, 3442, 3443

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

3025. Абстрактный закон простых чисел. Форман, Шапиро (Abstract prime number theorems. Forman William, Shapiro Harold N.), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 3, 587—619 (англ.)

Рассматривается обобщение закона простых чисел для прогрессий. Дается следующая абстрактная формулировка закона простых чисел. Пусть G — свободная абелева группа со счетным числом порождающих элементов $g_i\,(i = 1, 2, 3, \ldots)$; пусть N — гомоморфизм G на множество положительных рациональных чисел такой, что образы g_i, Ng_i — целые. Тогда и образы остальных элементов w— целые.

Далее рассматривается подгруппа G', имеющая конечный индекс $h = \left[\frac{G}{G'}\right]$, и буквой H обозначаются смежные классы группы G по подгруппе G'.

Задача состоит в том, чтобы, полагая для любого смежного класса H группы G по G' и элемента w

$$B_H(x) = \sum_{Nw \leqslant x,\ w \in H} 1 = c_H x + O(x^\theta),$$

$$0 \leqslant \theta < 1,\ c_H > 0,\ c = \sum\nolimits_H c_H > 0,$$

вывести для каждого H результат в следующей форме

$$\pi_H(x) = \sum_{Ng \leqslant x,\ g \in H} 1 = \frac{d_H x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

(обобщенный закон простых чисел для прогрессий).

Для доказательства устанавливается «обобщенное тождество Сельберга» в форме

$$\sum_{Nw \leqslant x,\ w \in H_i} \Lambda_G(w) \log Nw + \sum_{Nww' \leqslant x,\ ww' \in H_i} \Lambda_G(w)\,\Lambda_G(w') = \frac{2M_i}{h}\, x \log x + O(x)$$

Это обобщение тождества

$$\psi(x) \log x + \sum_{pq \leqslant x} \Lambda(p)\,\Lambda(q) = 2x \log x + O(x),$$

которое получается при выводе закона простых чисел в эквивалентной форме $\psi(x) \sim x$. Здесь $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, $\Lambda_G(w)$ — обобщенная функция Мангольдта, $M_i = \Sigma'_\chi \chi(H_i)$ по всем характерам, для которых $\Sigma_H c_H \chi(H) \neq 0$.

В других разделах статьи доказывается, что $\psi_{E_i}(x) \sim D(H_i)\,x$ (обобщение закона простых чисел в форме $\psi(x) \sim x$). Здесь $D(H_i)$ — плотность Дирихле класса H_i.

Рассматривается ряд примеров.

Е. П. Ожигова

3026. О свободных от квадратов числах в некоторой арифметической прогрессии, имеющих точно r простых множителей. Рихерт (Über quadratfreie Zahlen mit genau r Primfaktoren in einer arithmetischen Progression. Richert Hans-Egon), J. reine und angew. Math., 1953, 192, № 3—4, 180—203 (нем.)

Число чисел, не превосходящих x, принадлежащих прогрессии $kt + l$ и состоящих из r различных простых множителей, обозначается через $\pi_r(x; k, l)$. Как обычно, через $\varphi(n)$ обозначается функция Эйлера, а через $\Gamma(n)$ — гамма-функция. $\chi(n)$ — характер по модулю k, $\chi_0(n)$ — главный характер. Вводятся следующие обозначения:

$$Z(s, \chi) = \sum\nolimits_p \chi(p) / p^s \quad (s = \sigma + it,\ \sigma > 1),$$

где суммирование распространено по всем простым числам,

$$g(s) = Z(s, \chi_0) + \log(s - 1),$$

$$G^{(\rho)}_{\nu_2, \ldots, \nu_r}(s, k) = g^\rho(s)\, Z^{\nu_2}(2s, \chi_0) \ldots Z^{\nu_r}(rs, \chi_0),$$

где $0 \leqslant \rho \leqslant \nu_1 - 1,\ 0 \leqslant \nu_i \leqslant r$.

Функция $G^{(\rho)}_{\nu_2,\ldots,\nu_r}(s,k)$ регулярна при $|s-1|\leqslant 1/4$ и разлагается в этом круге в ряд

$$G^{(\rho)}_{\nu_2,\ldots,\nu_r}(s,k)=\sum_{m=0}^{\infty} d^{(\rho)}_{\nu_2,\ldots,\nu_r}(m,k)\,(1-s)^m,$$

$$A_r(h,m,k)=\sum_{\substack{0\leqslant\nu_i\leqslant r,\ i=1,2,\ldots,r\\ \sum_{i=1}^{r} i\nu_i=r,\ \nu_1\geqslant 1}}(-1)^{\nu_2+\nu_4+\cdots}\times$$

$$\times\Big(\prod_{n=1}^{r}\nu_n!\,n^{\nu_n}\Big)^{-1}\sum_{0\leqslant\lambda\leqslant(\nu_1-1)/2}\binom{\nu_1}{2\lambda+1}(-1)^{\lambda}\pi^{2\lambda}\times$$

$$\times\sum_{h\leqslant\mu\leqslant\nu_1-2\lambda-1}\binom{\nu_1-2\lambda-1}{\mu}d^{(\nu_1-2\lambda-1-\mu)}_{\nu_2,\ldots,\nu_r}(m,k)\times$$

$$\times\binom{\mu}{h}(-1)^{\mu-h}\Gamma^{(\mu-h)}(m+1),$$

$$L_{h,n}(x)=\int_2^x\frac{(\log\log u)^h}{\log^n u}\,du.$$

Доказывается теорема 1:

Пусть r, k и l — натуральные числа, $(k,l)=1$. Тогда при $x\geqslant 2$ и каждом $\varepsilon>0$, равномерно при росте k

$$\pi_r(x;k,l)=\frac{1}{\varphi(k)}\times$$

$$\times\sum_{0\leqslant m\leqslant\frac{1}{c}\sqrt{\log x}}\ \sum_{0\leqslant h\leqslant r-1}A_r(h,m,k)\,L_{h,m+1}(x)+$$

$$+O\Big(xe^{-\frac{1}{c}\sqrt{\log x}}\Big)+O\Big(x^{1-\frac{1}{bk^{\varepsilon}}}\frac{\log^{r-1}k\,(\log\log x)^{r-1}}{\varphi(k)\log x}\Big),$$

где c — абсолютная постоянная, b — постоянная, зависящая только от ε. Частным случаем этой формулы при $r=1$ является формула Пейджа—Зигеля—Вальфиша для функции $\pi(x;k,l)$, выражающей число простых чисел в прогрессии $kt+l$, меньших или равных x.

Доказательство теоремы 1 основано на рассмотрении представления $\pi_r(x,k,l)$ в виде

$$\frac{1}{2\pi i\varphi(k)}\sum_{\chi}\overline{\chi}(l)\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^s}{s}F_r(s,\chi)\,ds,$$

где

$$F_r(s,\chi)=\sum_{\substack{0\leqslant\nu_i\leqslant r,\ i=1,2,\ldots,r\\ \sum_{i=1}^{r} i\nu_i=r}}(-1)^{\nu_2+\nu_4+\cdots}\times$$

$$\times\Big(\prod_{n=1}^{r}\nu_n!\,n^{\nu_n}\Big)^{-1}Z^{\nu_1}(s,\chi)\,Z^{\nu_2}(2s,\chi)\ldots\,Z^{\nu_r}(rs,\chi).$$

Далее доказывается теорема 2:

Существует n_0 такое, что для каждого $n\geqslant n_0$ уравнение $p_1+p_2+p_3p_4=n$ имеет решение в простых числах p_i $(i=1,2,3,4)$. Для $\gamma(n)$ — числа решений этого уравнения имеем

$$\gamma(n)=\frac{n^2}{2\log^3 n}\big((\log\log n+B)\,\mathfrak{S}(n)+\mathfrak{S}_1(n)\big)+$$

$$+O\Big(\frac{n^2\log\log n}{\log^4 n}\Big),$$

где

$$\mathfrak{S}(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n),$$

$$\mathfrak{S}_1(n)=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu(k)}{\varphi^3(k)}D_k(n)\sum_{p/k}1,$$

$$B=\lim_{x\to\infty}\Big(\sum_{p\leqslant x}p^{-1}-\log\log x\Big)$$

(здесь, как обычно, $\mu(n)$ обозначает функцию Мёбиуса, а $D_k(n)=\sum_{d/(n,\,k)}d\mu(k/d)$). Эстерман (Estermann T., Quart. J. Math., Oxford II, 1937, ser. 8, 32—38) доказал, что при $n\equiv 1\pmod 2$

$$\gamma(n)\geqslant C\,\frac{n^2}{\log^3 n\log\log n}.$$

Поскольку $\mathfrak{S}(n)>c>0$ при $n\equiv 1\pmod 2$ и $\mathfrak{S}(n)=0$, $\mathfrak{S}_1(n)>c'>0$ при $n\equiv 0\pmod 2$ (c, c' — постоянные), то теорема 2 представляет собой усиление результата Эстермана. Доказательство теоремы 2 основано на изучении представления $\gamma(n)$ в виде

$$\gamma(n)=\int_I\rho^2(y,n)\,\sigma(y,n)\,e^{-2\pi iyn}\,dy,$$

где I — некоторый интервал длины 1,

$$\rho(y,n)=\sum_{p\leqslant n}e^{2\pi iyp},$$

$$\sigma(y,n)=\sum_{p_1p_2\leqslant n,\ p_1<p_2}e^{2\pi iy p_1p_2}.$$

А. А. Бухштаб

3027. О разности между последовательными свободными от квадратов числами. Рихерт (On the difference between consecutive squarefree numbers. Richert H.-E.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, part 1, № 113, 16—20 (англ.)

Оценки сверху разности между соседними числами, свободными от квадратов, были даны впервые в работах Фогелса (Fogels E., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1941, **37**, 358—372) и Давенпорта. Рот (Roth K. F., J. London Math. Soc., 1951, **26**, 263—268) получил лучшую из известных до сих пор оценок этой разности, доказав, что $s_{n+1}-s_n=O\,(n^{3/13}\,(\log n)^{4/13})$, где s_n — n-е натуральное число, свободное от квадратов. Доказывается следующая теорема:

Пусть $s_n(q,l)$ обозначает n-е свободное от квадратов число, принадлежащее арифметической прогрессии $mq+l$, где $1\leqslant l\leqslant q$, $(q,l)=1$, $m=0,1,\ldots$, $q=O\,(n^{2/7})$. Тогда при $n\to\infty$

$$s_{n+1}(q,l)-s_n(q,l)=O\,(q^{11/9}n^{2/9}\log n)$$

равномерно по n, q, l.

В частности, при $q=1$ это дает лучшую, чем у Рота, оценку

$$s_{n+1}-s_n=O\,(n^{2/9}\log n).$$

А. А. Бухштаб

3028. Таблицы трехмерных разбиений на части. Нанда (Tables of solid partitions. Nanda V. S.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1953, **19**, 313—314 (англ.)

В предыдущей статье (Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, **47**, 591—601) автор рассматривает плоские и трехмерные разбиения на части. Он обозначает через $p^{(3)}(n,m)$ число трехмерных разбиений на части n, в которых наименьший знак суммирования m.

Таким образом $p^{(3)}(n,n)=n(n+1)/2$, $p^{(3)}(n,m)=0$ для $n/2<m<n$. Следовательно, табулирование этой функции ограничено $m\leqslant n/2$. Таблицы даны для $n=2\,(1)\,25$. Входы $p^{(3)}(n,1)$ дают общее число неограниченных трехмерных разбиений на части $n-1$. Эта функция имеет производящую $\Pi_{r=1}^{\infty}(1-x^r)^{-r\,(r+1)/2}=1+x+4x^2+10x^3+\cdots$

D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 11, 1062.

3029. К представлению чисел суммами квадратов. Ломадзе Г. А., Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1954, **20**, 47—87

Работа является продолжением более ранних работ автора (Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1948, **16**, 231—275; 1949, **17**, 281—314) и состоит из вычислений, в результате которых получаются окончательные формулы для числа представлений натуральных чисел суммами 25—32 квадратов.

Библиография, 10 названий. А. А. Киселев

3030. О суммировании одного сингулярного ряда. II. Ломадзе Г. А., Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1954, **20**, 21—25

Продолжение предыдущей работы (РЖМат, 1954, 2838). Суммируется сингулярный ряд $\mathfrak{S}_s(n, m)$ ($s \geqslant 4$ — любое четное), который является множителем главного члена в формуле, выражающей число одновременных представлений m и n суммами s целых чисел и их квадратов. Э. К. Фогелс

3031. Представление чисел как сумм 8, 16 и 24 квадратов. Ван-дер-Поль (The representation of numbers as sums of eight, sixteen and twenty-four squares. Van der Pol Balth.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 3, 349—361 (англ.)

Пусть

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2t}\right)^{2l} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} r_{2l}(n),$$

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-k^2t}\right)^{2l} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} s_{2l}(n),$$

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-(k+1/2)^2 t}\right)^{2l} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} t_{2l}(n),$$

где $l = 4$, 8 и 12, $t > 0$. Доказывается, что величины $r_{2l}(n)$, $s_{2l}(n)$ и $t_{2l}(n)$ выражаются как полиномы от функций $\sigma_3(n)$, $\sigma_7(n)$ и $\sigma_{11}(n)$ и коэффициентов рядов $\Pi_1^{\infty}(1-q^{2n})$ и $e^{-t}\Pi_1^{\infty}(1-e^{-nt})^{24}$. Доказательство базируется на теории $\mathfrak{D}$-функций. Н. Г. Чудаков

3032. Обобщения тождеств Роджерса — Рамануджана. Олдер (Generalizations of the Rogers — Ramanujan identities. Alder Henry L.), Pacif. J. Math., 1954, **4**, № 2, 161—168 (англ.)

Доказываются тождества

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-x^{(2k+1)\nu+k})(1-x^{(2k+1)\nu+k+1})}{(1-x^{(2k+1)\nu+1})(1-x^{(2k+1)\nu+2})\ldots(1-x^{(2k+1)\nu+2k})} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{G_{k,\mu}(x)}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{\mu})}$$

и

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{(2k+1)\nu+2})(1-x^{(2k+1)\nu+3})\ldots(1-x^{(2k+1)\nu+2k-1})} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{G_{k,\mu}(x)\,x^{\mu}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{\mu})},$$

где k — целое положительное число, а $G_{k,\mu}(x)$ — многочлены от x. При $k=2$ эти тождества обращаются в тождества Роджерса — Рамануджана (Hardy, Wright, Introduction to the theory of numbers, Oxford, 1938, гл. 19). *Н. И. Фельдман*

3033. О целых точках на эллипсоидах. Малышев А. В., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3, 253—255

Рассматривается вопрос о представлении целых чисел положительными тернарными целочисленными квадратичными формами $f(x, y, z)$ инвариантов $[r, 1]$, принадлежащих роду $\mathfrak{G}_{[r,1]}$, определяемому характерами $\left(-\frac{f}{p}\right) = 1$ для всех простых $p \nmid r$. Формулирован ряд теорем, уточняющих и обобщающих результаты Ю. В. Линника и А. В. Малышева (РЖМат, 1953, 39; 1954, 5438). Приведем одну из них:

Пусть $r = p_1^{e_1}\ldots p_k^{e_k}$ — нечетное число; $f(x, y, z) \in \mathfrak{G}_{[r,1]}$; целое число m просто с r, причем сравнение $m \equiv f(x,y,z) \pmod{8r}$ разрешимо. Обозначим через $t(f, m)$ количество примитивных представлений числа m формой f. Тогда при $m \to \infty$

$$t(f, m) \sim \begin{cases} \dfrac{12 \cdot 2^k h(-m)}{r\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_k}\right)}, & m \equiv 1, 2 \pmod 4, \\ \dfrac{8 \cdot 2^k h(-m)}{r\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_k}\right)}, & m \equiv 3 \pmod 8, \end{cases}$$

$$t(f, m) = 0, \quad m \equiv 0 \pmod 4, \quad m \equiv 7 \pmod 8,$$

где $h(-m)$ — количество классов положительных собственно примитивных бинарных квадратичных форм определителя m.

Примечание референта. В опубликованной статье (РЖМат, 1954, 5438) эти формулы содержат неточности в числовых множителях. Ю. В. Линник

3034. О целых точках в многомерных эллипсоидах. Работа 16. Вальфиш А. З., Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1954, **20**, 1—20

Пусть $A_{2k}(x) = \sum_{j_1^2+\ldots+j_{2k}^2 \leqslant x} 1$ — число целых точек в $2k$-мерном шаре $j_1^2 + \ldots + j_{2k}^2 \leqslant x$ объема $V_{2k}(x) = \pi^k x^k / \Gamma(k+1)$; $P_{2k}(x) = A_{2k}(x) - V_{2k}(x)$; пусть

$$P_{2k,\,a} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \equiv a \pmod 2}} \sup \frac{P_{2k}(n)}{\frac{\pi^k}{2\Gamma(k)} n^{k-1}},$$

$$\rho_{2k,\,a} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \equiv a \pmod 2}} \inf \frac{P_{2k}(n)}{\frac{\pi^k}{2\Gamma(k)} n^{k-1}}.$$

Получены следующие оценки для $P_{2k,a}$ и $\rho_{2k,a}$:

1) если $k \equiv 0 \pmod 4$, $k \geqslant 4$, то

$$P_{2k,\,0} = \frac{\zeta(k-1)}{Z(k)}, \quad \rho_{2k,\,1} = 2 - \frac{\zeta(k-1)}{Z(k)};$$

2) если $k \equiv 2 \pmod 4$, $k \geqslant 6$, то

$$0 \leqslant P_{2k,0} - \frac{\zeta(k-1)}{Z(k)} + \frac{2\theta_{2k}}{Z(k)} \leqslant 1{,}04 \cdot 2^{-2k^2+k+1},$$

$$-1{,}04 \cdot 2^{-2k^2+k+1} \leqslant \rho_{2k,\,1} - 2 + \frac{\zeta(k-1)}{Z(k)} - \frac{2\theta_{2k}}{Z(k)} \leqslant 0;$$

3) если $k \equiv 0 \pmod 2$, $k \geqslant 6$, то

$$0 \leqslant P_{2k,\,1} - \frac{\zeta(k-1)}{Z(k)} + \frac{2^k\theta_{2k}}{Z(k)} \leqslant \frac{1}{k} 2^{-k^2+\frac{7k}{3}-2},$$

$$-\frac{1}{k} 2^{-k^2+\frac{7k}{3}-2} \leqslant \rho_{2k,0} - 2 + \frac{\zeta(k-1)}{Z(k)} - \frac{2^k\theta_{2k}}{Z(k)} \leqslant 0;$$

здесь $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$, $Z(x) = (1-2^{-x})\zeta(x)$,

$$\theta_{2k} = \sum_{\alpha=2}^{\infty} 2^{\alpha(1-k)} \sum_{\substack{u=1 \\ u \equiv -1, -1/3, \ldots -1/(2^{\alpha-1}-1) \pmod{2^{\alpha}}}}^{\infty} u^{1-k}.$$

Эти оценки аналогичны предыдущим результатам автора (Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1947, **15**, 275—296; 297—322).
А. В. Малышев

3035. О неопределенных бинарных квадратичных формах. Оппенгейм (On indefinite binary quadratic forms. Oppenheim A.), Acta math., 1954, **91**, № 1—2, 43—50 (англ.)

Рассматривается

$$L = \min \{\max (|Q(x, y)|, |Q(u, v)|)\},$$

где $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ — квадратичная форма с $D^2 = b^2 - 4ac > 0$, $D > 0$, а переменные x, y, u, v принимают целые значения с условием $xv - yu = \pm 1$. Доказаны теоремы:

Теорема 1. Если Q представляет нуль, то $L \leqslant D/2$, где знак равенства имеет место только в случае $Q \sim \sim \frac{1}{2} D(x^2 - y^2)$.

Теорема 2. 1) Если Q нуль не представляет, то $L < D/2$. 2) Для каждого $\varepsilon > 0$ существует форма с целыми коэффициентами такая, что $^1/_2 D - \varepsilon < L < {}^1/_2 D$, причем, если принимать во внимание все формы, а не только с целыми коэффициентами, то это неравенство выполняется в континууме случаев (эквивалентные лучи форм не считаются различными).
Д. С. Горшков

3036. Квадратичные формы. Каплански (Quadratic forms. Kaplansky Irving), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 2, 200—207 (англ.)

Факт представления нуля квадратичной формой с пятью переменными может быть выведен из следующих предположений относительно поля F: F не есть формально действительное поле, и его мультипликативная группа по модулю квадратов имеет четвертый порядок. Замечая это, автор выдвигает гипотезу: если существует n классов по модулю квадратов, то каждая квадратичная форма $\Sigma a_i x_i^2$ с $n+1$ переменными представляет нуль. Доказаны теоремы:

1. Пусть поле F с характеристикой, отличной от двух, не есть формально действительное поле, и пусть мультипликативная группа ненулевых элементов по модулю квадратов имеет порядок A. Тогда каждая квадратичная форма с $A+1$ переменными над F представляет нуль по крайней мере в двух случаях: 1) $A \leqslant 8$, 2) -1 есть сумма четырех или меньшего числа квадратов в F.

2. Пусть в поле F с характеристикой, отличной от двух, -1 представима суммой квадратов, и пусть F допускает ровно одну, с точностью до изоморфизма, кватернионную алгебру с делением. Тогда в F каждая квадратичная форма с пятью переменными представляет нуль.
Д. С. Горшков

3037. Об аппроксимации комплексных чисел с помощью чисел поля $K(i\sqrt{2})$. Олива (Über die Approximation von komplexen Zahlen durch Zahlen des Körpers $K(i\sqrt{2})$. Oliwa Godfried), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1953, **90**, № 1—15, 171—173 (нем.)

Дается следующий результат.

Для всякого комплексного числа ξ существует по крайней мере одна пара $p, q \neq 0$ целых чисел поля $K(i\sqrt{2})$, для которых имеет место неравенство

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{2 - \sqrt{2}}{|q|^2},$$

причем постоянная $2 - \sqrt{2}$ является наилучшей, так как неравенство $\left|\xi_0 - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{c}{|q|^2}$ не имеет решения в поле $K(i\sqrt{2})$ при $\xi_0 = (2 + i\sqrt{2})/2$, $c < 2 - \sqrt{2}$.

Для поля $K(i)$ аналогичный результат с постоянной, равной $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, был раньше получен Хофрейтером (Hofreiter N., Monatsh. Math., 1952, **56**, 61—74).

Доказательство теоремы не дано, так как, по утверждению автора, оно аналогично доказательству соответствующей теоремы Хофрейтера.
П. Г. Когония

3038. О распределении дробных долей комплексных чисел, кратных некоторому комплексному числу. Сюс (Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats. Szüsz P.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, № 1—2, 35—39 (нем., резюме русс.)

Пусть

$$z_1 = \alpha + i\beta, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1.$$

Обозначим через J_q (произвольно расположенный) параллелограмм, две стороны которого определяются векторами

$$\frac{\min [\{q\alpha\}, \{q\beta\}]}{\max [\{q\alpha\}, \{q\beta\}]} \text{ и } \min [\{q\alpha\}, \{q\beta\}] + i \max [\{q\alpha\}, \{q\beta\}].$$

Символ $\{u\}$ означает, как обычно, дробную часть u. Если через $N_{z_1}(n, J_q)$ обозначить число тех $\nu \leqslant n$, для которых $\{\nu\alpha\} + i\{\nu\beta\} = z_\nu \in J_q$, то при $n \to \infty$ справедлива оценка

$$|N_{z_1}(n, J_q) - n \min [\{q\alpha\}, \{q\beta\}]| = O(1),$$

где порядок $O(1)$ зависит только от α, β и q и не зависит от положения J_q.
Э. Апарисис

3039. О диофантовом уравнении $|Ax^n - By^n| = 1$, $n \geqslant 5$. Домар (On the Diophantine equation $|Ax^n - By^n| = 1$, $n \geqslant 5$. Domar Yngve), Math. scand., 1954, **2**, № 1, 29—32 (англ.)

Видоизменением рассуждений Зигеля (Siegel C. L., Math. Ann., 1937, **114**, 57—68) доказаны две теоремы, обобщающие результат Хегмарка (Häggmark P., On a class of quintic Diophantine equations in two unknowns. Diss., Uppsala, 1952):

1. Уравнение $|Ax^n - By^n| = 1$, где A и B — положительные целые числа и $n \geqslant 5$, имеет не более двух решений в положительных целых числах (x, y).

2. Уравнение $|x^n - My^n| = 1$, где M — целое положительное число, $n \geqslant 5$, причем $M \neq 2^n + 1$ в случае $n = 5, 6$ и $M \neq 2$, имеет не более одного решения в положительных целых числах (x, y).
А. В. Малышев

3040. Неразрешимые классы диофантовых уравнений. Анкень, Эрдёш (The insolubility of classes of Diophantine equations. Ankeny N. C., Erdös P.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 3, 488—496 (англ.)

Пусть $m > 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — отличные от нуля целые рациональные числа, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — одновременно не равные нулю целые рациональные числа, U — положительное неограниченно возрастающее число, $D(U, a_1, a_2, \ldots, a_n) = D(U)$, $m \leqslant U$, — число решений уравнения

$$a_1 X_1^m + a_2 X_2^m + \ldots + a_n X_n^m = 0 \qquad (1)$$

относительно целочисленных неизвестных $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Доказывается теорема: Если для каждого фиксированного $e_j = 0$ или ± 1 $(j = 1, 2, \ldots, n)$, исключая случай $(e_1, \ldots, e_n) = (0, \ldots, 0)$, имеется $a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n \neq 0$, то $D(U) = o(U)$ при $U \to +\infty$.

При $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ уравнение (1) переходит в уравнение Ферма $X_1^m + X_2^m + X_3^m = 0$. Рассматривается частный случай для этого уравнения $(X_1 X_2 X_3, m) = 1$. Результат $M(U) = o(U)$ в данном случае может быть улучшен: $M(U) = O(U (\log U)^{-c})$, где $c > 0$ — постоянное. Существенно использована теорема Вандивера о числе решений уравнений типа (1) (Vandiver H. S., Proc. Nat. Acad. Sci., 1946, **32**, 101—108).
П. Н. Реморов

3041. Об уравнении $y^2 = x^3 - 3\lambda\mu\, x - \lambda^3\alpha - \mu^3\alpha^{-1}$. Менон (On the equation $y^2=x^3-3\lambda\mu x-\lambda^3\alpha-\mu^2\alpha^{-1}$. Menon P. Kesava), Math. Student, 1954, 22, № 2, 85—88 (англ.)

Рассматривается вопрос о решении уравнения

$$y^2 = x^3 - 3\lambda\mu x - \lambda^3\alpha - \mu^3\alpha^{-1} \qquad (1)$$

в рациональных x, y для данных рациональных α, λ, μ. Показывается, что решение уравнения (1) может быть сведено к решению уравнения $\alpha X(\mu + X^2\alpha) = Y(\lambda\alpha + Y^2)$ в рациональных X, Y. Выводятся формулы, при помощи которых из одного частного решения уравнения (1) можно получить другое, и рассматривается частный случай $\lambda = \alpha + \beta$, $\mu = \alpha^{-1} + \beta$. Рассуждения элементарны. В. И. Нечаев

3042. О последней теореме Ферма в относительных циклических числовых полях. Денеш (Über den letzten Fermatschen Satz in relativ-zyklischen Zahlkörpern. Dénes P.), Ann. polon. math., 1954, 1, № 11, 77—80 (нем.)

Указывается серия полей $K_0, K_1, \ldots, K_i$, в которых уравнение $x^n + y^n = z^n$, $xyz \neq 0$, n — целое > 2, не имеет решения в целых числах поля.

Пусть l — регулярное простое число поля K_0, образованного корнями из единицы: $\zeta = \exp(2\pi i / l)$, $\lambda = 1 - \zeta$, $1 = (\lambda)$, и E_0 — единица в K_0, не являющаяся l-й степенью единицы из K_0. Строится куммерово поле $K_1 = K(\sqrt[l]{E_0}, \zeta)$. Если E_1 — единица из K_1, не являющаяся l-й степенью единицы из K_1, строится поле $K_2 = K(\sqrt[l]{E_1}, \zeta)$ и т. д. Рассмотрим поле $K_i = K(\sqrt[l]{E_{i-1}}, \zeta)$, где E_{i-1} — единица из K_{i-1}, не являющаяся l-й степенью единицы из K_{i-1}. В работе автора (Monatsh. Math., 1951, 55, 229—232) показано, что (l) может быть разложен в поле K_i на простые идеалы в виде: $(l) = \mathfrak{L}_i^{l^i(l-1)}$ ($\mathfrak{L}_i$ — главный идеал в K_i). Известно также, что число классов идеалов K_i взаимно просто с l.

Методом, аналогичным куммеровскому, при доказательстве теоремы Ферма для регулярных показателей $n = l$, автор строит доказательство теоремы:

Пусть n — натуральное число, A_1, A_2, A_3 — взаимно простые с $\mathfrak{L}_i$, H — некоторая единица из K_i. Уравнение $A_1^l + A_2^l = H\lambda^{nl}A_3^l$ неразрешимо. П. Н. Реморов

3043. Об иррегулярном круговом поле. Денеш (Über irreguläre Kreiskörper. Dénes Peter), Publs mathematicae, 1953, 3, № 1—2, 17—23 (нем.)

Пусть p — нечетное простое число, $\zeta = \exp(2\pi i p^{-1})$, $\Omega(\zeta)$ — круговое поле. Если не все числа Бернулли $B_1, B_2, \ldots, B_{(p-3)/2}$ взаимно просты с p, то p называется иррегулярным.

Показываются условия существования, в данном иррегулярном поле $\Omega(\zeta)$, единицы поля, равной p^z степени некоторой единицы $\Omega(\zeta)$ (z — целое положительное число). П. Н. Реморов

3044. Обобщение теоремы Анкени и Роджерса. Манн (Ageneralization of a theorem of Ankeny and Rogers. Mann H. B.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, 3, № 1, 106—108 (англ.)

Пусть R — поле рациональных чисел, F — любое алгебраическое поле, p — простой идеал поля F с нормой $N(p)$ и S обозначает любое множество идеалов p с плотностью Дирихле

$$\lim_{s\to 1+} \Big(\sum_{p\in S} N(p)^{-s}\Big) \Big/ \log\frac{1}{s-1},$$

равной 1. Пусть далее $\xi(n)$ обозначает первообразный n-й корень единицы, α — наибольшее целое число, для которого $\beta = [2 + \xi(2^\alpha) + 1/\xi(2^\alpha)]^{-1} \in F$, m — натуральное число $= 2^k m'$, где m' — нечетное число, $F_1 = F \cap R(\xi(2^k))$ и $a \in F$ является вычетом m-й степени для всех $p \in S$. Доказывается теорема: Если $\alpha \geqslant k$ или поле F_1 — комплексное, то a — точная m-я степень. Если $\alpha < k$ и F_1 — вещественное, то a — или точная m-я степень или $a = b^m\beta^{m/2}$, причем $\beta^{m/2}$ в поле F не является m-й степенью, но является вычетом m-й степени для всех p. Соответствующую теорему в поле R доказали Анкени и Роджерс (Ankeny N. C., Rogers C. A., Ann. Math., 1951, 53, 541—550). Э. К. Фогелс

3045. Плотность кубических абелевых полей. Кон (The density of abelian cubic fields. Cohn Harvey), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 476—477 (англ.)

Дается формула (асимптотическая) для числа $N_A(x)$ кубических циклических полей, дискриминанты которых $\leqslant x$. $N_A(x) \sim 11c/18)\, x^{1/2}$. Автор указывает на сообщенные ему, но пока не опубликованные, результаты Давенпорта, что $N(x) = O(x)$, и Хейлбронна, что $N(x) > c_1 x$, если $N(x)$ — число всех кубических полей, дискриминанты которых по абсолютной величине $\leqslant x$.

Примечание референта. Результат Хейльбронна уже известен (Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К., Теория иррациональностей третьей степени, М.—Л., 1940, стр. 168), а результат автора есть частный случай результата Б. М. Уразбаева (РЖМат, 1955, 2086), который дал асимптотическую формулу для числа циклических полей любой простой степени l, дискриминанты которых $\leqslant x^{l-1}$. Б. Н. Делоне

3046. Рекуррентная формула для простых чисел. Тёффель (Eine Rekursionsformel für Primzahlen. Teuffel E.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1954, 57, № 1, 34—36 (нем.)

В статье Исенкраэ (Isenkrahe C., Math. Ann., 1900, 53) был дан способ последовательного вычисления простых чисел. В реферируемой работе также дается рекуррентная формула для определения $(m+1)$-го простого числа по m предшествующим. Как справедливо отмечает автор, метод имеет преимущество наглядности, но не может быть использован для вычисления простых чисел, так как необходимая вычислительная работа практически невыполнима.

Автор исходит из известного тождества Эйлера

$$\zeta(k) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_\nu^{-k}} \quad (k > 1),$$

где p_ν — ν-е простое число, $\zeta(k)$ — риманова ζ-функция.

Числа q_m определяются равенством $q_m^k = 1 + (\zeta\Pi_m - 1)^{-1}$, где $\Pi_m = \Pi_{\nu=1}^{m-1}(1 - p_\nu^{-k})$, и показывается, что если известно $m-1$ простых чисел, то можно выбрать натуральное число $k > 2p_{m-1}$ и для него вычислить q_m. Тогда p_m — наибольшее целое число, содержащееся в $q_m + 1$, $p_m = [q_m + 1]$. Е. П. Ожигова

3047. О некоторых конечных непрерывных дробях. Микусинский (Sur certaines fractions continues finies. Mikusiński J.), Ann. polon. math., 1954, 1, № 1, 203—206 (франц.)

Пусть $K(n)$ — наибольшее число членов разложения обыкновенных дробей $1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n$ в непрерывную конечную дробь $(a_1, \ldots, a_k)$.

Доказывается неравенство

$$\frac{1}{2a} < \frac{K(n)}{\ln n} < \frac{1}{a} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

где $a = \ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. В. А. Голубев

3048. О приближении десятичных дробей десятичными дробями. Мёленбелд (On the approximating decimal fractions of decimals. Meulenbeld B.), Simon Stevin, 1954, **30**, № 2, 65—78 (англ.)

Пусть действительное иррациональное число α ($0<\alpha<1$) выражается систематической дробью в системе счисления $g=2^k\omega\geqslant 2$ в виде $\alpha=0,a_1a_2\ldots$ (a_i — целые), т. е.

$$\alpha=\sum_{m=1}^{\infty}a_m/g_m \quad (a_m<g).$$

Приближения числа α при том же g будут

$$\frac{P_1}{Q_1},\ldots,\frac{P_m}{Q_m}=0,a_1a_2\ldots a_m \quad (m=1,2,\ldots)$$

Пусть e обозначает четность, o — нечетность. Тогда все дроби P_m/Q_m после их сокращения будут одного из трех классов: $\left(\frac{o}{o}\right)$, $\left(\frac{e}{o}\right)$, $\left(\frac{o}{e}\right)$.

Исследуется вопрос, возможно ли и при каких условиях построить иррациональное число с бесконечным числом приближенных несократимых дробей P_m/Q_m (при данном g), принадлежащих только одному из этих трех классов.

Доказывается, что при $k=0$, $\omega\geqslant 3$ существуют α, все приближения которых P_m/Q_m принадлежат только классу $\left(\frac{o}{o}\right)$ или только $\left(\frac{e}{o}\right)$, или двум классам $\left(\frac{o}{o}\right)$ и $\left(\frac{o}{e}\right)$.

При $k>0$, $\omega\geqslant 3$ и $m>\lg\omega/k\lg 2$ не может быть двух последовательных приближений класса $\left(\frac{o}{o}\right)$ или $\left(\frac{e}{o}\right)$. Указывается способ нахождения для каждого P_m/Q_m класса $\left(\frac{o}{o}\right)$ следующего приближения класса $\left(\frac{o}{o}\right)$ или $\left(\frac{e}{o}\right)$. В. А. Голубев

3049. Обратные и дополнительные последовательности натуральных чисел. Ламбек, Мозер (Inverse and complementary sequences of natural numbers. Lambek J., Moser L.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 7, part 1, 454 — 458 (англ.)

Два множества натуральных чисел называются дополнительными, если каждое натуральное число принадлежит к одному и только к одному из этих множеств. Множество, дополнительное к множеству F, будем обозначать символом CF. Под словом «число» будем понимать целое неотрицательное число или бесконечность. При этом предполагается, что конечное число меньше бесконечности и что бесконечность плюс или минус конечное число есть бесконечность. Пусть $f=\{f(1),f(2),\ldots\}$ — неубывающая последовательность чисел. Символом $f(n)$ обозначаем n-й член этой последовательности или бесконечность, если число членов в ней меньше n. Символом $f^\dagger(n)$ будем обозначать число натуральных чисел m с условием $f(m)<n$. Две последовательности чисел f и g будем называть обратными, если для любой пары положительных целых m и n имеет место и притом только одно из двух $f(m)<n$ или $g(n)<m$.

Доказываются:

Теорема 1. Последовательность чисел имеет обратную тогда и только тогда, если она неубывающая. Обратная последовательность к последовательности f определяется однозначно и совпадает с $f^\dagger$.

Теорема 2. $CF(n)=n+f^\dagger(n)$, где $f(m)=F(m)-m$.

Теорема 3. $CF(n)=\lim_{k\to\infty}F_k(n)$, где $F_0(n)=n$ и при $k>0$ $F_k(n)=n+F^\dagger(1+F_{k-1}(n))$.

Теорема 4. Если $F(m+1)-F(m)\geqslant m$, то $CF(n)=F_2(n)$.

Из последней теоремы, например, следует, что n-е число ряда натуральных чисел, не являющееся квадратом, есть $n+\left[\sqrt{n+[\sqrt{n}]}\right]$. Указывается, что теорема 3 была установлена ранее. В. И. Нечаев

3050. О двух разложениях на множители. Габар (Sur deux factorisations. Gabard E.), Mathesis, 1954, **63**, № 3—5, 117—119 (франц.)

1. Известно разложение на множители числа Мерсенна $2^{151}-1=18\,121\times 55\,871\times 165\,799\times 2\,332\,951\times 7\,289\,088\,383\,388\,253\,664\,437\,433$, но не было доказано, что последний множитель — число простое. Кратко доказывается простота этого множителя.

2. Доказывается также, что второй множитель разложения $2^{101}+1=3\times 845\,100\,400\,152\,152\,934\,331\,135\,470\,251$ — число простое. Для этого использована теорема Лемера. Если p — простой делитель числа $N-1=mp=kp^\alpha$ и N делит $b^{kN}-b^k$, $(k,p)=1$, $(N,b^{km}-1)=1$, то все делители N имеют форму $p^\alpha x+1$. В. А. Голубев

3051. О многочленах второй степени, представляющих многие простые числа. Маржик (O kvadratických polynomech, které nabývají mnoha prvočíselných hodnot. Maříк Jan), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 57—58 (чеш.)

Приводится ряд примеров многочленов второй степени, которые для нескольких небольших натуральных значений x представляют числа вида $\pm q$, где q — простое. Примеры сообщены автору М. Новаковой. В. Б. Демьянов

3052. Определители Ханкеля и числа Бернулли. Карлиц (Hankel determinants and Bernoulli numbers. Carlitz L.), Tôhoku Math. J., 1954, **5**, № 3, 272—276 (англ.)

Определителем Ханкеля называется определитель $D=|a_{i+j}|$ $(i,j=0,1,2,\ldots,r)$, где $a_0,a_1,\ldots a_{2r}$ — произвольная последовательность чисел. Известно, что $D=|\Delta^{i+j}a_0|$ $(i,j=0,1,2,\ldots,r)$, где $\Delta^k a_i=\Delta^{k-1}a_{i+1}-\Delta^{k-1}a_i$. Если числа a_i — рациональные, целые по модулю m и при $k\geqslant 1$ удовлетворяют сравнениям

$$\Delta^k a_0\equiv 0\pmod{m^k}, \tag{1}$$

то

$$D\equiv 0\pmod{m^{r(r+1)}}. \tag{2}$$

Эти общие соображения применяются к случаям, когда числа a_i выражаются через числа Бернулли и Эйлера (первого и высших порядков). При этом сравнения (1) выполняются в силу известных сравнений Куммера и их аналогов. Из (2) следует тогда ряд конкретных сравнений. Например, если p — простое число $\geqslant 3$, $e\geqslant 1$, $p^{e-1}(p-1)/b$, то имеем:

1) $|E_{m+(i+j)b}|\equiv 0\pmod{p^{er(r+1)}}$ при $m\geqslant re$ $(i,j=0,1,\ldots,r)$;

2) $\left|\frac{B_{m+(i+j)b}}{m+(i+j)b}\right|\equiv 0\pmod{p^{er(r+1)}}$ при $m>re$, $p-1\nmid m$.

Здесь числа E_m и B_m определяются соотношениями

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\sum_{m=0}^{\infty}E_m\frac{x^m}{m!},\quad \frac{x}{e^x-1}=\sum_{m=0}^{\infty}B_m\frac{x^m}{m!}.$$

Аналоги сравнений Куммера имеют место и для мно-

гочленов $A_m(u)$ и $\beta_m(u)$, определяемых разложениями

$$\operatorname{sn}(x, u) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(u)\, x^m / m!,$$

$$x / \operatorname{sn}(x, u) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m(u)\, x^m / m!,$$

где $\operatorname{sn}(x, u)$ — эллиптическая функция Якоби. Поэтому для них также получаются сравнения типа (2).

А. А. Киселев

3053. Ряд Фибоначчи и обратные числа. Роберт (The Fibonacci series and reciprocals. Robert Harry C., Jr), Duodecimal Bull., 1954, **10**, № 1, 11—14 (англ.)

Приводится несколько элементарных тождеств, касающихся рекуррентных последовательностей.

Н. Н. Воробьев

3054 К. Основы теории чисел. Русу (Bazele teoriei numerelor. Rusu Eugen, 181 pp., Biblioteca societàtii de ştiinţe matematice şi fizice din RPR, Editura Technica, 1953, 4 p., 6, 23 lei) (рум.)

Руководство по элементарной теории чисел, предназначенное для студентов I курса и разделенное на 3 части. Часть I содержит предварительные сведения (основные определения и понятия, делимость, разложение целого числа на простые множители, понятие о классах вычетов по данному модулю, начала теории сравнений (теоремы Ферма, Эйлера и Вильсона, понятие о поле классов вычетов простого модуля, сравнения любой степени по простому модулю), свойства функции Эйлера $\varphi(n)$ (мультипликативность, теорема Гаусса и т. п.), учение о степенных и квадратичных вычетах (первообразные корни, индексы, двучленные сравнения, квадратичные вычеты, простые числа формы $4k+1$; распространение некоторых результатов на случай сложного модуля), приложения (о периодических m-ичных дробях).

Часть II заключает доказательство единственности разложения числа на простые множители, вопрос о разложении простого числа на сумму двух квадратов и краткую теорию целых комплексных чисел Гаусса (определения, единицы, алгоритм Евклида в приложении к целым комплексным числам, разложение целого комплексного числа на простые множители, вопрос о разложении любого натурального числа на сумму двух квадратов).

В части III содержатся краткие сведения относительно неопределенных уравнений (решение пифагорова уравнения в целых числах, доказательство отсутствия целых решений для уравнения $x^4 + y^4 = z^4$, понятие об общей задаче Ферма, краткие сведения об уравнении Пелля и ряде Фибоначчи).

К каждому разделу курса имеются упражнения весьма элементарного характера, решение которых указано в конце книги, где приложены также четыре таблицы (первообразные корни для простых модулей <4000, несколько таблиц степенных вычетов для отдельных небольших модулей, таблица индексов, таблица наименьших делителей чисел до 10 000).

Почти все таблицы заимствованы автором из книги И. М. Виноградова «Основы теории чисел».

А. И. Попов

3055 К. Простые числа. Трост (Primzahlen. Trost Ernst, 95 S., Birhauser, Basel, Stuttgar, 1953, 13.50 fr.), Schweiz. Buch., 1953, **A 53**, № 24, 576 (библ.)

3056 К. Высшая арифметика. Полный теоретический и практический курс высшей арифметики. Тражано (Aritmética progressiva. Curso completo teórico e prático de aritmética superior. Trajano Antonio, 83 ed., 271 pp., il., Rio de Janeiro, Liv. Francisco Alves. 1953, Cr. $ 30,00), Bol. bibliogr. brasileiro, 1953, **1**, № 3, 15 (библ.)

3057 К. Элементарная теория чисел. Гриффин (Elementary theory of numbers. Griffin Harriet, Ix, 203 pp., tables, diagr., New York, London, McGraw-Hill, 1954, 48 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 246, 6 (библ.)

См. также: 3000, 3246, 3403

АЛГЕБРА

3058 К. Алгебраическая теория спиноров. Шевалле (Algebraic theory of spinors. Chevalley Claude C., 128 pp., Columbia Univ. Press., 1954, 3.75 doll.) (англ.)

3059 Д. Система результантов и алгебраические соотношения. Орзингер (Resultantensysteme und algebraische Relationen. Orsinger Heinz. 60 S., Berlin, Math.-naturwiss. F., 1953), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 17, 1432 (нем.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

3060. Теория форм Эрмита над произвольным полем с инволюцией. Смирнов Г. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 5, 41—52

Рассматривается векторное пространство R над полем K характеристики $p \neq 2$ с инволюцией $a \to a'$. Предполагается, что R псевдоунитарно, т. е. что в R задано скалярное произведение $X \cdot Y$ векторов $X, Y \in R$, значение которого принадлежит K и которое удовлетворяет условиям:

1) $X \cdot Y = (Y \cdot X)'$; 2) $(X_1 + X_2) \cdot Y = X_1 \cdot Y + X_2 \cdot Y$;

3) $cX \cdot Y = c(X \cdot Y)$ для $c \in K$;

Пространство R называется полным, если не существует вектора $X \neq 0$, ортогонального ко всему R; в противном случае R называется неполным. Вектор X называется изотропным, если $X \cdot X = 0$; пространство R называется определенным, если в нем нет отличных от нуля изотропных векторов.

Доказывается, что:

1. Всякое псевдоунитарное пространство есть прямая сумма полного пространства и нуль-пространства, т. е. такого, где скалярное произведение любых двух векторов равно нулю.

2. В полном пространстве сумма размерностей подпространства и перпендикуляра к нему (т. е. подпространства всех векторов, к нему ортогональных) равна размерности всего пространства.

3. Если Q — подпространство полного пространства R, а P — перпендикуляр к Q, то R есть прямая сумма P и Q тогда и только тогда, когда Q есть полное пространство.

4. Во всяком полном пространстве существует ортогональный базис.

5. Если в полном пространстве R имеются два изоморфных подпространства Q и Q' и если ψ есть изоморфизм Q с Q', то существует автоморфизм всего пространства R, совпадающий на Q с ψ.

6. Всякое псевдоунитарное пространство есть прямая сумма взаимно ортогональных пространств, из которых

одно определенное, другое есть прямая сумма взаимно ортогональных гиперболических плоскостей, а третье есть нуль-пространство. (Гиперболической плоскостью автор называет всякое двумерное полное псевдоунитарное пространство, имеющее по крайней мере один ненулевой изотропный вектор; автор доказывает, что все гиперболические плоскости над данным полем K изоморфны).

7. Два псевдоунитарных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда в описанном в п. 6 разложении изоморфны их определенные слагаемые, одинаковы числа гиперболических плоскостей и равны размерности нуль-слагаемых.

Полученные результаты формулируются также в терминах теории эрмитовых форм. М. А. Наймарк

3061. Об одном способе изложения теории определителей. Филью (Un procédé d'exposition de la théorie des déterminants. Filho J. A. Breves), Rev. math. spéc., 1954, 64, № 7, 158—159 (франц.)

Предлагается способ изложения теории определителей, основанный на индуктивном введении понятия определителя. Изложение ничего оригинального не представляет. Л. Я. Окунев

3062. Об одном типе альтернанты. Понтинг (A type of alternant. Ponting F. W.), Proc. Edinburgh., Math. Soc., 1953, 9, ser. 2, 20—27 (англ.)

Пусть $\alpha_j^{(k)} = (\alpha_j + \beta_1)(\alpha_j + \beta_2) \ldots (\alpha_j + \beta_k)$; предполагается, что $\alpha_p \neq \alpha_q$ при $p \neq q$. Разбиение $N = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ числа N на сумму слагаемых $(\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n)$ обозначим через (λ) и положим $l_j = \lambda_j + n - j$.

Через $\{\alpha;\ (\lambda);\ \beta\}$ обозначается функция, определяемая из соотношения

$$|\alpha_s^{(l_t)}| = \{\alpha;\ (\lambda);\ \beta\} \cdot |\alpha_r^{n-t} | \alpha_s^{n-t}|;$$

здесь и всюду в дальнейшем s и t обозначают номера строки и столбца определителя n-го порядка. Если все $\beta_i = 0$, то получается S-функция $\{\alpha;\ (\lambda)\}$ (Littlewood D. E., Theory of Group Characters, Oxford, 1940, гл. VI). Введем еще две функции $b(u, v)$ и $H(u, v)$: если $0 < v \leqslant u$, то $b(u, v)$ есть v-я элементарная симметрическая функция от $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_u$; если $v = 0$, то $b(u, 0) = b(0, 0) = 1$; если $v < 0$ или $u < v$, то $b(u, v) = 0$. Если $0 < v$, то под $H(u, v)$ будет подразумеваться v-я полная однородная симметрическая функция от $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_u$; если $v = 0$, то полагаем $H(u, 0) = H(0, 0) = 1$; наконец, если $v < 0$, то полагаем $H(u, v) = 0$.

Доказываются следующие три теоремы:

1. Выполняется равенство

$$\{\alpha;\ (\lambda);\ \beta\} = \sum \{\alpha;\ (\lambda_1 - r_1, \lambda_2 - r_2, \ldots, \lambda_n - r_n)\} \times |b(l_s, l_s - l_t + r_t)|,$$

причем суммирование берется по всем неотрицательным r_i, для которых $\lambda_1 - r_1 \geqslant \lambda_2 - r_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n - r_n \geqslant 0$.

2. Пусть $\lambda_1 \leqslant n$, (μ) и $(\mu - r')$ — разбиения, сопряженные соответственно с (λ) и $(\lambda - r)$, $m_s = \mu_s + n - s$; тогда

$$|b(l_s, l_s - l_t + r_t)| = H(2n - m_s, m_s - m_t + r_t')|.$$

3. Функция $|b(l_s, l_s - l_t + r_t)|$ может быть выражена в виде полинома от $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{l_1}$ с целыми положительными коэффициентами. Л. Я. Окунев

3063. О признаке условной определенности квадратичной формы n переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функции n переменных. Шостак Р. Я., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2, 199—206

Рассматривается квадратичная форма $U(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = 0 \ (i = 1, \ldots, k < n); \ |b_{ij}|_1^k \neq 0. \qquad (1)$$

Обозначим через $\sum_{i,j=k+1}^{n} A_{ij} x_i x_j$ квадратичную форму, в которую переходит $U(x, x)$ после исключения из (1) переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а через $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n+k}$ последовательные «вложенные» главные миноры определителя

$$D = (-1)^k \begin{vmatrix} 0 \ldots 0 & b_{11} \ldots b_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 & b_{k1} \ldots b_{kn} \\ b_{11} \ldots b_{k1} & a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b_{1n} \ldots b_{kn} & a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

В статье доказано, что $\Delta_{2k+1}, \ldots, \Delta_{n+k}$ отличаются только положительными множителями от соответствующих определителей в ряду

$$A_{k+1,\,k+1};\ \begin{vmatrix} A_{k+1,\,k+1} & A_{k+1,\,k+2} \\ A_{k+2,\,k+1} & A_{k+2,\,k+2} \end{vmatrix} \ldots$$
$$\ldots \begin{vmatrix} A_{k+1,\,k+1} & \ldots & A_{k+1,\,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{n,k+1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

В частности, отсюда следуют:

I. Необходимый и достаточный признак определенности $U(x, x)$ при условиях (1):

$\Delta_\mu > 0$ — для положительной определенности, (3)

$(-1)^\mu \Delta_\mu > 0$ — для отрицательной определенности

$$\mu = 2k + 1, \ 2k + 2, \ldots, n + k.$$

II. Достаточный признак существования условного экстремума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при наличии связей $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$, состоящий также в положительности всех миноров (3) определителя (2), в котором

$$a_{ij} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i \partial x_j}; \ b_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j};$$

$$v = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j (x_1, \ldots, x_n).$$

Эти результаты остаются справедливыми и при замене условий (1) неоднородными условиями $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = e_i$ $(i = 1, \ldots, k < n)$, если одновременно заменить определитель (2) определителем

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 \ldots 0 & b_{11} \ldots b_{1n} & e_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 \ldots 0 & b_{k1} \ldots b_{kn} & e_k \\ b_{11} \ldots b_{k1} & a_{11} \ldots a_{1n} & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ b_{1n} \ldots b_{kn} & a_{n1} \ldots a_{nn} & 0 \\ e_1 \ldots e_k & 0 \ldots 0 & 0 \end{vmatrix},$$

рассматривая в последнем миноры $2k + 1, 2k + 2, \ldots, (n + k + 1)$ порядков. Д. М. Котелянский

3064. О знаках решения системы линейных уравнений. Михельсон В. С., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 163—170

Работа посвящена вопросу о необходимых и достаточных условиях существования у систем линейных уравнений решений, имеющих заданное распределение знаков. Называя характеристикой данного ряда отличных от нуля чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ряд $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ их знаков, частичной характеристикой порядка $i_1, i_2, \ldots, i_n$ этой характеристики (здесь $1 \leqslant i_j \leqslant n$, $i_j < i_{j+1}$) ряд $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_l}$ и обозначая через D минор матрицы системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad (1)$$

определяемый первыми R ее строками и первыми R ее столбцами, автор дает эти условия в виде следующей теоремы.

Пусть ранг матрицы системы (1) равен $R < n$ и $D \neq 0$. Тогда для того, чтобы система (1) имела решение $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (при $u_j \neq 0$) с наперед заданной характеристикой $\delta(u) = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $R+1$ индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{R+1}$, $1 \leqslant i_j \leqslant n$, $i_k < i_{k+1}$, что ранг матрицы системы

$$\sum_{j=1}^{R+1} a_{i_i j}x_{i_j} = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m, \qquad (2)$$

равен R и система (2) имеет решение $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{k+1}}$, характеристика которого совпадает с частичной характеристикой порядка $i_1, i_2, \ldots, i_{R+1}$ характеристики $\delta(u)$.

Применяя эту теорему к системе

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

ранга $R = 2$, имеющей решение $(1, 1, 1, 1)$ с характеристикой $+ + + +$, мы должны были бы получить из нее, после вычеркивания одного из неизвестных, систему ранга $R = 2$, имеющую решение с характеристикой $+ + +$. Однако, какое бы неизвестное мы ни вычеркнули, каждый раз получится система, все решения которой имеют хотя бы одну равную нулю координату. Полученное противоречие показывает, что условия существования у системы (1) решений, имеющих наперед заданное распределение знаков, содержащиеся в рассматриваемой теореме, не являются необходимыми; достаточность же их непосредственно вытекает из теоремы Гаммэ (Amer. Math. Monthly, 1926, **33**, № 10, 488), содержащей необходимые и достаточные условия существования строго положительных решений у систем линейных однородных уравнений.

Кроме рассмотренной основной теоремы, в реферируемой работе содержатся также некоторые непосредственно вытекающие из нее предложения. В связи со сделанным здесь замечанием о справедливости лишь достаточных условий в основной теореме необходимые условия этих предложений теряют силу.

С. Н. Черников

3065. О применении пространственных матриц к исследованию кубических тройничных форм над полем вещественных чисел. Соколов (Про застосування просторових матриць до дослідження кубічних тернарних форм над полем дійсних чисел. Соколов М. П.), Доповіді АН УРСР, 1954, № 3, 159—164 (укр.; резюме русс.)

Приводится полная система инвариантов кубической тройничной формы над полем вещественных чисел относительно невырожденных линейных преобразований с вещественными коэффициентами. Форма называется неособой, если посредством указанных преобразований она может быть приведена к виду $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6mx_1x_2x_3$, где m — вещественное число (различным значениям m соответствуют неэквивалентные формы). Все остальные формы называются особыми; они разбиваются на конечное число (равное 13) классов эквивалентности. Для каждого класса приводится его представитель (каноническая форма). Далее указывается, чем характеризуются неособые формы при различных значениях m и особые формы каждого класса с геометрической точки зрения, если рассматривать их как кривые 3-го порядка на проективной плоскости.

В. Б. Демьянов

3066. Границы для модулей нулей полиномов. Кёлер (Bounds for the moduli of the zeros of a polynomial. Koehler Fulton), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 414—419 (англ.)

Островский назвал «диаграммой Ньютона», связанной с полиномом $f(z) \equiv a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, ($a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$), выпуклую ломаную линию, «подпирающую снизу» в координатной плоскости (x, y) множество точек $M_\nu(\nu, -\log|a_\nu|)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$.

Обозначая нули полинома $f(z)$ через $z_1, z_2, \ldots, z_n$ $(0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots \leqslant |z|)$, а нижнюю и верхнюю границы отношения $|a_k z_k| / |a_{k-1}|$ через b_k^n и B_k^n, Островский установил (Acta Math., 1940, **72**, 99—257) соотношение $B_k^n = 1 / b_{n-k+1}^n$ и показал, что: 1) b_1^n равняется положительному корню уравнения $1 = x + x^2 + \cdots + x^n$, 2) $b_n^n = \frac{1}{n}$ и 3) $b_2^3 = \frac{1}{3}$.

В настоящей заметке устанавливается более общий результат: оказывается, что граница b_k^n равна положительному корню уравнения

$$1 = \binom{k}{1} x + \binom{k+1}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n-k+1} x^{n-k+1}$$

$(1 \leqslant k \leqslant n)$.

В. Л. Гончаров

3067. О корнях алгебраических уравнений с действительными коэффициентами. Обрешков (Über die Wurzeln algebraischer Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Obreschkoff Nicola), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 506—509 (нем.)

Доказывается теорема типа Ролля:

Пусть α и β $(\alpha < \beta)$ — два последовательных корня многочлена $f(x)$ степени n с действительными коэффициентами, q — кратность корня β; r — число действительных корней этого многочлена, бо́льших, чем β; $\zeta = \beta - q(\beta - \alpha)/(n - r)$. Если многочлен $f(x)$ не имеет корней в круге K, построенном на отрезке $[\alpha, \zeta]$ как на диаметре, то производная $f'(x)$ имеет по крайней мере один корень на полуинтервале $(\alpha, \zeta]$.

Приводится также новое элементарное доказательство «правила Эрмита» для приближенного решения алгебраических уравнений с простыми действительными корнями (Laguerre E., Oeuvres, t. I, Paris, 1898, 87—103).

В. Л. Гончаров

3068. Способ приведения общей формы второго порядка с n переменными к универсальной квадратичной форме, дающей все канонические формы. Накоренко Г. В., Сб. тр. Ленингр. гидрометеорол. ин-та, 1954, № 3, 156—176

Известный факт о возможности приведения общего уравнения гиперповерхности второго порядка

$$\sum_{k,\,l=1}^{n} A_{kl}x_k x_l + 2\sum_{k=1}^{n} A_k x_k + A_0 = 0$$

(все A — вещественные числа) при помощи ортогональ-

ного преобразования координат и параллельного переноса осей к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k y_k^2 + \gamma y_n = 0,$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_n, \gamma$ — вещественные (и притом конечные) величины, устанавливается в несколько иной (на взгляд референта, не совсем математически корректной) форме с привлечением бесконечных значений для некоторых коэффициентов. Ф. Р. Гантмахер

3069. Кососимметрические определители. Парамесваран (Skew-symmetric determinants. Parameswaran S.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 116 (англ.)

Приводится элементарное доказательство того, что каждый кососимметрический определитель четного порядка является квадратом некоторого целого алгебраического выражения относительно элементов определителя. Доказательство индуктивно относительно порядка определителя. Ф. Р. Гантмахер

3070. О характеристическом многочлене произведения двух матриц. Рот (On the characteristic polynomial of the product of two matrices. Roth William E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 1—3 (англ.)

Доказывается теорема: Если A и B — две квадратные матрицы n-го порядка, имеющие соответственно характеристические многочлены $a_0(x^2) - xa_1(x^2)$ и $b_0(x^2) - xb_1(x^2)$, и ранг $A - B$ не превосходит единицы, то характеристический многочлен произведения двух матриц AB равен $(-1)^n [a_0(x)\, b_0(x) - xa_1(x)\, b_1(x)]$.

Ф. Р. Гантмахер

3071. Об одном типе сходимости к сингулярной матрице. Инону, Вигнер (On a particular type of convergence to a singular matrix. Inonu E., Wigner E. P.), Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 1954, **40**, № 2, 119—121 (англ.)

В предыдущей заметке (РЖМат, 1954, 2874) авторы рассматривали в связи с теорией групп Ли линейные преобразования вида $J_i = \Sigma_1^n (u_{ij} + \varepsilon w_{ij}) I_j$, где u — сингулярная матрица ранга r и $\det \| u + \varepsilon w \| \not\equiv 0$. Они считали, что всегда можно найти две такие невырожденные матрицы β и α, что $\beta u \alpha^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$, $\beta w \alpha^{-1} = \left\| \begin{matrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$, где 1, 0, v — матрицы. Пример матриц второго порядка $\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$, $\left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$ показывает, что это не так. Утверждение верно, если $u(u + \varepsilon w) u^{-1} \to u$ при $\varepsilon \to 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при ε^{n-2} в определителе $|u + \varepsilon w|$ не обращался в нуль. Н. Я. Виленкин

3072 к. Определители и матрицы. VII. Эйткен (Determinants and matrices. Aitken Alexander Craig, VII + 144 p., diagrs, Edinburgh, London, Oliver and Boyd, New York, interscience Publishers, 1954, 7/6), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 231, 8 (библ.)

3073 к. Полилинейные формы и элементарные делители в кольце главных идеалов. Грегер (Multilinear forms and elementary divisors in a principal ideal ring. Greger Karl, 7s., Lund., Gleerupska univ.-bokh., 1953, I.), Svensk bokförteckn., 1953, oktober, s. 9, 9 (библ.)

ГРУППЫ

3074. Групповые элементы, индексы которых являются степенями простых чисел. Бер (Group elements of prime power index. Baer Reinhold). Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, № 1, 20—47 (англ.)

Все группы, рассматриваемые в работе, конечны. Индексом элемента называется число элементов, с ним сопряженных, т. е. индекс его нормализатора, причем автор специально интересуется элементами, индексы которых являются степенями простых чисел. Основной результат работы состоит в полном описании тех конечных групп, всякий p-элемент которых (т. е. элемент, порядком которого служит степень простого числа p) имеет для всех p своим индексом также степень некоторого простого числа. Оказывается, что это будут те и только те группы, которые разложимы в прямое произведение групп взаимно простых порядков, причем каждый из множителей этого разложения или будет p-группой, или же его порядок делится точно на два различных простых числа, а все силовские подгруппы абелевы.

Дальнейшее содержание работы связано с понятием гиперцентра. Эта характеристическая (хотя не обязательно вполне характеристическая) подгруппа группы G может быть определена, как доказано, одним из следующих равносильных способов. Это будет: а) тот член верхней центральной цепи группы, на котором эта цепь стабилизируется; б) пересечение всех нормальных делителей, фактор-группы по которым не имеют центра; в) пересечение нормализаторов всех силовских подгрупп; г) пересечение всех максимальных нильпотентных подгрупп. В работе дается описание тех элементов и тех нормальных делителей группы, которые содержатся в гиперцентре. Так, нормальный делитель N тогда и только тогда содержится в гиперцентре, если выполняется одно из следующих равносильных условий: а) все p-элементы из N имеют своими индексами также степени p; б) для любой нильпотентной подгруппы U произведение NU также будет нильпотентным; в) всякий элемент x из N перестановочен со всяким таким элементом y группы G, порядок которого взаимно прост с порядком элемента x. Применяя эти результаты к случаю $N = G$, т. е. к случаю нильпотентной группы, автор получает несколько критериев нильпотентности группы. Так, конечная группа тогда и только тогда нильпотентна, если всякий ее p-элемент имеет своим индексом степень числа p, а также если ее элементы взаимно простых порядков перестановочны.

Из других результатов работы отметим теорему о том, что если конечная группа не имеет нетривиальных вполне характеристических подгрупп, то у нее нет и нетривиальных характеристических подгрупп.

А. Г. Курош

3075. Число подгрупп данного индекса в несчетных абелевых группах. Скотт (The number of subgroups of given index in nondenumerable Abelian groups. Scott W. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 19—22 (англ.)

Пусть G — абелева группа мощности $\mathfrak{n} > \aleph_0$ и $\mathfrak{m}$ — кардинальное число, удовлетворяющее условию $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$. Доказывается, что тогда: а) группа G имеет $2^{\mathfrak{n}}$ подгрупп индекса $\mathfrak{m}$, и пересечение всех таких подгрупп есть 0, в) существует множество M мощности $2^{\mathfrak{n}}$ подгрупп группы G, имеющих в G индекс $\mathfrak{m}$ и таких, что $G/H \simeq G/K$ для любых двух подгрупп H и K из M. Л. Я. Куликов

3076. Частично упорядоченные локально нильпотентные группы. Виноградов А. А., Уч. зап. Ивановск. гос. ин-та, 1953, **4**, 3—18

Центральная система $\{A_\alpha\}$ частично упорядоченной группы называется выпуклой, если все входящие в нее подгруппы A_α выпуклые. Доказана теорема: Если частично упорядоченная группа G обладает выпуклой

ентральной системой, все факторы которой — группы ез кручения, то группу G можно пополнением полуруппы положительных элементов превратить в упоядоченную. Доказано, что l-группа, не имеющая собственных выпуклых подгрупп, всегда будет архимедовой, упорядоченной и коммутативной. Доказана теорема: Если каждое конечное подмножество элементов -группы содержится в некоторой нильпотентной l-подруппе с конечным числом образующих, то l-группа меет выпуклый центральный ряд и, следовательно, пополнением полугруппы положительных элементов ее можно превратить в упорядоченную. Отсюда, в частности, следует, что всякая l-группа, удовлетворяющая условиям последней теоремы, имеет собственный -идеал. Е. П. Шимбирева

3077. Абелевы группы, кольца эндоморфизмов которых без кручения. Селпал (The abelian groups with torsion-free endomorphism ring. Szélpál I.), Publs Mathematicae, 1953, **3**, № 1—2, 106—108 (англ.)

Описываются абелевы группы, кольца эндоморфизмов которых имеют аддитивную группу без кручения. Это будут те и только те абелевы группы, которые представимы в виде прямой суммы $A + B$, где A — полная периодическая группа, а B — группа без кручения, полная относительно каждого из тех простых чисел, которые входят в порядки элементов группы A. З. М. Кишкина

3078. О Ф-подгруппе конечных групп. Гашюц (Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen. Gaschütz Wolfgang), Math. Z., 1953, **58**, № 2, 160—170 (нем.)

В первой части работы даются некоторые обобщения результатов о Ф-подгруппе $\Phi(\mathfrak{G})$ конечной группы $\mathfrak{G}$, полученных ранее другими авторами. Так, доказывается теорема: из нильпотентности фактор-группы $\mathfrak{N}/\Psi$, где $\mathfrak{N}$, Ψ — нормальные делители группы $\mathfrak{G}$, $\Psi \subset \mathfrak{N} \cap \Phi(\mathfrak{G})$, следует, что $\mathfrak{N}$ нильпотентна. Отсюда, в частности, вытекает утверждение о нильпотентности $\Phi(\mathfrak{G})$, доказанное в 1885 г. Фраттини. Из этой теоремы и из ряда других, более очевидных, делается заключение о типе фактор-группы $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$, где $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ — однозначно определенный по Вендту максимальный нильпотентный нормальный делитель $\mathfrak{G}$, а именно: $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})/\Phi(\mathfrak{G})$ является произведением минимальных нормальных делителей $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$. Вторая часть работы посвящена изучению Ф-свободных групп, т. е. групп $\mathfrak{G}$ с $\Phi(\mathfrak{G}) = 1$. Приводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы группа $\mathfrak{G}$ была Ф-свободной.

Дано описание всех Ф-свободных групп, представляющее собой интересную аналогию теории полупростых групп, разработанной Фиттингом. Всякая конечная группа $\mathfrak{G}$ является расширением своей характеристической Ф-подгруппы $\Phi(\mathfrak{G})$ при помощи Ф-свободной группы $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$. Так как класс Ф-подгрупп уже класса разрешимых групп, используемых в теореме Фиттинга, то, по мнению автора, проблема расширения при новом подходе окажется более простой. Точной характеристики тех групп, которые являются Ф-подгруппами, однако, нет. Известно лишь, что не всякая нильпотентная группа может быть Ф-подгруппой. А. И. Кострикин

3079. О классах Фробениуса в нильпотентных группах. II. Кнохе (Über den Frobeniusschen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen. II. Knoche Hans-Georg), Math. Z., 1953, **59**, № 1, 8—16 (нем.)

Автор предлагает классифицировать p-группы по их «ширине» (Breite). По определению, элемент A данной p-группы имеет ширину $\beta = \beta(A)$, если он принадлежит к классу сопряженных элементов, состоящему из p^β элементов. Шириной $\beta(\mathfrak{G})$ p-группы $\mathfrak{G}$ называется наибольшая ширина элемента этой группы. Группы ширины 0 абелевы. Группы ширины 1 рассматривались в ранее опубликованной первой части работы автора (Math. Z., 1951, **55**, 71—82).

Доказывается, что:

1) Если $\beta(\mathfrak{G}) = 2$, то класс $c(\mathfrak{G})$ этой группы (т. е. число членов центрального ряда) не выше 3.

2) Если $\beta(\mathfrak{G}) = 3$, то $c(\mathfrak{G}) \leqslant 4$.

Автор изучает структуру p-групп ширины 2 при $p > 2$. Отметим теорему: Если $\beta(\mathfrak{G}) = 2$ и $p > 2$, то подгруппа Фраттини группы $\mathfrak{G}$ абелева. При выводе теорем автор существенным образом опирается на результаты, полученные Холлом (Hall P., Proc. London Math. Soc., 1933, **36**, 29—95). П. Е. Дюбюк

3080. О влиянии числа всех классов неинвариантных сопряженных подгрупп на свойства конечной неспециальной группы. Трофимов П. И., Матем. сб., 1953, **33** (**75**), № 1, 45—72

Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная группа порядка g, $\rho(\mathfrak{G})$ — число всех классов неинвариантных подгрупп группы $\mathfrak{G}$ и $\tau(g)$ — число всех различных простых делителей порядка g группы $\mathfrak{G}$.

Автор устанавливает следующую зависимость между $\rho(\mathfrak{G})$ и $\tau(g)$ для конечной неспециальной группы $\mathfrak{G}$ порядка g (теорема 9): если $\rho(\mathfrak{G}) = 1, 2$, то $\tau(g) \leqslant \leqslant \rho(\mathfrak{G}) + 1$; если $\rho(\mathfrak{G}) = 3, 4$, то $\tau(g) \leqslant \rho(\mathfrak{G})$; если $\rho(\mathfrak{G}) \geqslant 5$, то $\tau(g) \leqslant \rho(\mathfrak{G}) - 2$.

Приводятся примеры, иллюстрирующие эти соотношения. Случай $\rho(\mathfrak{G}) = 1, 2$ вытекает из исследований О. Ю. Шмидта, описавшего все типы конечных групп с одним и двумя классами неинвариантных подгрупп (Матем. сб., 1926, **33**, 161—172; Тр. сем. по теории групп. М — Л., 1938, 7—26). Результаты автора уточняют установленную ранее Сигли (Sigley D. T., Ann. Math., 1940, **41**, № 4, 767—770) зависимость $\tau(g) < \leqslant \rho(\mathfrak{G}) + 2$ применительно к конечной неспециальной группе.

Доказывается, что для всякого натурального k существуют конечные неспециальные разрешимые группы, содержащие k классов неинвариантных подгрупп. Этот результат обобщает исследования Сигли (см. указанную выше работу), доказавшего существование групп $\mathfrak{G}$, для которых $\rho(\mathfrak{G}) = k$.

В статье доказывается также еще ряд лемм и теорем, из которых, в частности, следует (теоремы 6, 10 и 11), что конечная группа $\mathfrak{G}$ разрешима, если $\rho(\mathfrak{G}) \leqslant 6$. Другим следствием является следующий результат, аналогичный одной из теорем Д. П. Колянковского (Матем. сб., 1946, **19** (**61**), 429—436): если группа $\mathfrak{G}$ порядка g неразрешима, то $\rho(\mathfrak{G}) \geqslant \tau(g) + 2$.

При обосновании некоторых теорем в статье приводятся доказательства общеизвестных фактов, например известной теоремы Фробениуса: группа, порядок которой равен произведению первых степеней различных простых чисел,— разрешима (Граве Д., Теория конечных групп, Киев, 1908, стр. 113). С. П. Азлецкий

3081. Несколько замечаний о коммутаторах матриц. Фань Цюй (Some remarks on commutators of matrices. Fan Ky), Arch. Math., 1954, **5**, № 1—3, 102—107 (англ.)

Доказывается следующее предложение для элементов абстрактных групп. Два элемента x, y группы G могут быть представлены в виде $x = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{2n} \times \times a_{2n+1}$, $y = a_{2n+1} a_{2n} \ldots a_3 a_2 a_1$ $(n \geqslant 1,\ a_i \in G)$ в том и только в том случае, если xy^{-1} есть произведение n коммутаторов из G.

Затем доказывается ряд результатов, касающихся матричных групп, а именно: каждая унитарная, соответственно нормальная, матрица X с $\det X = 1$ является коммутатором из унитарных, соответственно из нормальных, матриц; эрмитова матрица H с $\det H = 1$

является коммутатором из эрмитовых матриц в том и только в том случае, если H и H^{-1} имеют одинаковые собственные значения; произвольная эрмитова матрица H с $\det H = 1$ может быть представлена как произведение двух коммутаторов из эрмитовых матриц.

Эти предложения являются детализацией хорошо известного факта, что каждая неособенная матрица X с $\det X = 1$ является коммутатором. А. В. Сульдин

3082. О группах автоморфизмов нильпотентных групп. Чарин В. С., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 3, 295—304

Усиливая условия некоторых теорем из работ А. И. Мальцева (Матем. сб., 1951, 28(70), 567—588) и референта (РЖМат, 1953, 90), автор добивается уточнения соответствующих заключений. Таковы теоремы 2, 4 и 6. Из других результатов отметим следующие:

1. Мультипликативная группа алгебраических чисел, степени которых в совокупности ограничены, является прямым произведением конечной группы и свободной абелевой группы конечного или счетного ранга.

2. Всякий нильпотентный нормальный делитель без кручения N локально нильпотентной группы G, централизатор которого имеет в G конечный индекс, обладает конечным G-центральным рядом.

3. Локально нильпотентная группа автоморфизмов Γ нильпотентной группы без кручения конечного ранга нильпотентна и содержит нормальный делитель Δ конечного ранга, фактор-группа Γ/Δ по которому является свободной абелевой группой конечного или счетного ранга.

4. Если группа G обладает конечным нормальным рядом, факторы которого изоморфны нециклическим подгруппам аддитивной группы рациональных чисел, то G — конечное расширение нильпотентной группы. Д. М. Смирнов

3083. Дальнейшие исследования по аксиоматике групп. Столт (Weitere Untersuchungen zur Gruppenaxiomatik. Stolt Bengt), Arkiv mat., 1954, 3, № 5, 89—101 (нем.)

Устанавливается полнота и неприводимость некоторых систем аксиом, определяющих группу, рассматривавшихся автором ранее в его диссертации (Über Axiomensysteme, die eine abstrakte Gruppe bestimmen, Uppsala, 1953). А. П. Дицман

3084. К проблеме Такахаси. Хигман (On a problem of Takahasi. Higman Graham), J. London Math. Soc., 1953, 28, part 2, № 110, 250—252 (англ.)

Известно, что всякая свободная группа локально свободна. Такахаси (J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. (A), 1950, 1, 65—75) показал, что свободные группы обладают следующим свойством α): группа не имеет строго возрастающей бесконечной последовательности подгрупп с n образующими ни при каком (фиксированном) натуральном n. Там же был поставлен вопрос: будет ли всякая счетная локально свободная группа, удовлетворяющая свойству α), свободной? В реферируемой работе вопрос Такахаси решен отрицательно построением соответствующего примера группы. Ю. И. Соркин

3085. О строении унитарных групп. II. Дьёдонне (On the structure of unitary groups. II. Dieudonné Jean), Amer. J. Math., 1953, 75, № 4, 665—678 (англ.)

Пусть K — произвольное тело с инволюцией J, $\xi \to \xi^J$, E — некоторое n-мерное правое векторное пространство над K и f — невырожденная эрмитова форма над E, т. е. линейное по x и y отображение $(x, y) \to f(x, y)$ произведения $E \times E$ в тело K, для которого $f(y, x) = f(x, y)^J$; причем, если при некотором y элемент $f(x, y) = 0$ для всех x, то $y = 0$. Линейное отображение u пространства E на себя называется унитарным, если $f(u(x), u(y)) = f(x, y)$ для всех $x, y \in E$. Совокупность всех унитарных преобразований образует группу $U_n(K, f)$. Эта группа изучалась автором ранее (Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, 367—385); реферируемая же работа содержит некоторые дополнительные результаты.

Разбирается случай, когда тело K имеет характеристику 2. Этот случай в упомянутой статье был изучен лишь при следующем дополнительном предложении: для любого вектора $x \in E$ существует такой элемент $\xi \in K$, что $f(x, x) = \xi + \xi^J$. В реферируемой работе для любой формы f в группе $U_n(K, f)$ строится композиционный ряд $U_n(K, f) \supset \Gamma_0 \supset \Gamma$, обладающий следующими свойствами: 1) фактор-группа $U_n(K, f)/\Gamma$ изоморфна группе $U_m(K, f_1)$, где $m \leqslant n$, а форма f принадлежит к описанному выше классу форм; 2) группы Γ_0/Γ и Γ абелевы и обладают простым строением (полностью выясненным автором).

Для тел любой характеристики доказано, что, за исключением одного случая, группа $U_n(K, f)$ порождается квазисимметриями относительно гиперплоскостей пространства E.

Сделаны также некоторые замечания к доказательствам теорем предыдущих работ. М. М. Постников

3086. Представления полупростых групп Ли в банаховом пространстве. Харин-Чандра (Representations of a semisimple Lie group on a Banach space. I. Harish-Chandra), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 2, 185—243 (англ.)

Дается подробное изложение части результатов, сообщенных автором ранее (несколько заметок в Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 37).

Часть I. Представления полупростых алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — полупростая алгебра Ли над полем вещественных чисел, $\mathfrak{g}$ — ее окомплексивание и $\mathfrak{g}_k$ — компактная вещественная форма. Согласно Картану, существует инволютивный автоморфизм θ алгебры $\mathfrak{g}$ такой, что $\theta\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{q}_0$, $\theta\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_k$ и $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{f}_0 + \sqrt{-1}\,\mathfrak{p}_0$, где $\mathfrak{f}_0(\mathfrak{p}_0)$ — множество всех векторов из $\mathfrak{g}$, не изменяющихся (соответственно, меняющих знак) при автоморфизме θ. Через $\mathfrak{f}$ обозначается подпространство в $\mathfrak{g}$, натянутое на $\mathfrak{f}_0$.

Пусть ρ — представление $\mathfrak{f}$ в векторном пространстве V (не обязательно конечной размерности), W — инвариантное подпространство, ρ_W — представление $\mathfrak{f}$, индуцируемое ρ в W. ρ_W называется простым (полупростым), если W конечномерно и ρ_W просто (полупросто) в обычном смысле. Пусть Ω — множество всех классов эквивалентных простых представлений и $\mathfrak{D} \in \Omega$; через $V_{\mathfrak{D}}$ обозначается сумма всех инвариантных относительно ρ подпространств W из V, для которых $\rho_W \in \mathfrak{D}$. Представление ρ называется квазиполупростым, если $V = \sum_{\mathfrak{D} \in \Omega} V_{\mathfrak{D}}$.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ универсальную обволакивающую алгебру для $\mathfrak{g}$ и через $\mathfrak{X}$ подалгебру $\mathfrak{B}$, порожденную $(1, \mathfrak{f})$. Доказывается, что если $\mathfrak{Y}$ — левый идеал в $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}$ конечномерно и естественное представление $\mathfrak{f}$ в $\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}$ полупросто, то естественное представление $\mathfrak{f}$ в $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}\mathfrak{Y}$ квазиполупросто. Пусть $\mathfrak{D}$ — любой класс эквивалентных конечномерных простых представлений $\mathfrak{f}$, пусть $\mathfrak{B}^*_{\mathfrak{D}}$ — множество всех элементов из $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}/\mathfrak{B}$, которые при естественном представлении π алгебры $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}^*$ преобразуются в соответствии с $\mathfrak{D}$. Доказывается, что $\mathfrak{B}^*_{\mathfrak{D}}$ есть конечный модуль над центром алгебры $\mathfrak{B}$.

Часть II. «Хорошие» функции на группе Ли. Пусть π — представление связной группы Ли G в банаховом пространстве $\mathfrak{H}$. Элемент $\psi \in \mathfrak{H}$ называется «хорошим» (по отношению к π), если $x \to \pi(x)\psi$ есть аналитическое отображение G в $\mathfrak{H}$. Пусть W — множество всех хороших по отношению к π элементов из $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{g}_0$ — алгебра Ли группы G. Для любых $\psi \in W$ и $X \in \mathfrak{g}_0$ рассматривается отображение $t \to \pi(e^{tX})\psi$ (t пробегает вещественные числа). Доказывается, что существует

$$\lim_{t\to 0} 1/t\ \{\pi(e^{tX})\psi - \psi\} = \pi_W(X)\psi.$$

Если $\psi \in W$, то существует такая окрестность V нуля в $\mathfrak{g}_0$, что ряды $\Sigma_{m\geqslant 0} 1/m!\ \pi_W(X^m)\psi$ сходятся к $\pi(e^X)\psi$ для $X \in V$.

Алгебра Ли (над полем характеристики нуль) называется квазинильпотентной, если она есть прямая сумма абелевой подалгебры и нильпотентного идеала. Связная группа Ли называется квазинильпотентной, если ее алгебра Ли квазинильпотентна. Пусть связная группа Ли G имеет две аналитические подгруппы K и S такие, что: а) K компактна, S квазинильпотентна, б) каждый элемент в G может быть однозначно записан в виде us ($u \in K$, $s \in S$). Пусть π — представление G в банаховом пространстве $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_0$ — множество всех хороших элементов ψ из $\mathfrak{H}$ таких, что линейное пространство, натянутое на элементы $\pi(u)\psi$ ($u \in K$), имеет конечную размерность. Тогда $\mathfrak{H}_0$ плотно в $\mathfrak{H}$.

Часть III. Представления полупростых групп Ли. Результаты части II применяются к изучению представлений связной полупростой группы Ли G в банаховом пространстве. Без ограничения общности группу G можно считать односвязной. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — ее алгебра Ли; $\mathfrak{f}_0$ определим как и в части I; пусть $\mathfrak{c}_0$ — центр $\mathfrak{f}_0$; K и D — аналитические подгруппы в G, отвечающие соответственно $\mathfrak{f}_0$ и $\mathfrak{c}_0$, Z — центр в G. Представление π G в $\mathfrak{H}$ называется допустимым, если $\pi(z)$ кратно единичному оператору для $z \in D \cap Z$.

Пусть Ω — множество классов эквивалентных конечномерных неприводимых представлений K. Для любого $\mathfrak{D} \in \Omega$ обозначим через $\mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}$ множество всех элементов $\psi \in \mathfrak{H}$ со следующим свойством: существует конечномерное линейное пространство U, содержащее ψ, которое инвариантно и полупросто относительно $\pi(K)$ и таково, что представление K, индуцируемое на каждом простом подпространстве пространства U, лежит в $\mathfrak{D}$. Доказывается, что если π — допустимое представление G в $\mathfrak{H}$, W — множество всех хороших элементов в $\mathfrak{H}$ и $W_{\mathfrak{D}} = W \cap \mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}$ то, пространство $\Sigma_{\mathfrak{D}\in\Omega} W_{\mathfrak{D}}$ плотно в $\mathfrak{H}$.

Если π — неприводимое представление G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то каждый элемент в $\Sigma_{\mathfrak{D}\in\Omega}\mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}$ является хорошим и $\dim \mathfrak{H}_{\mathfrak{D}} < \infty$ ($\mathfrak{D} \in \Omega$). Кроме того, $\Sigma_{\mathfrak{D}\in\Omega}\mathfrak{H}_{\mathfrak{D}}$ плотно в $\mathfrak{H}$. Пусть π — представление G в $\mathfrak{H}$ и V — подпространство Гардинга в $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{B}$ имеют тот же смысл, что и в части I; пусть $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{B}$ и π_V — гардингово представление $\mathfrak{B}$ в V. Представление π называется квазипростым, если: 1) π допустимо и 2) существует гомоморфизм χ центра $\mathfrak{Z}$ в поле комплексных чисел такой, что $\pi_V(Z)\psi = \chi(z)\psi$ для всех $z \in \mathfrak{Z}$ и $\psi \in V$; χ называется инфинитезимальным характером представления π. Если π — квазипростое унитарное представление G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} \neq 0$, то в $\mathfrak{H}$ существует минимальное замкнутое инвариантное подпространство.

Наряду с обычным понятием эквивалентности двух представлений, вводится понятие инфинитезимальной эквивалентности. Пусть π_1 и π_2 — допустимые представления G в банаховых пространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Пусть W_i — пространство всех хороших элементов в $\mathfrak{H}_i$ и π_{W_i} — представление $\mathfrak{B}$ в W_i ($i = 1, 2$). Положим $W_{i,\mathfrak{D}} = W_i \cap (\mathfrak{H}_i)_{\mathfrak{D}}$ и $H_i^0 = \Sigma_{\mathfrak{D}\in\Omega} W_{i,\mathfrak{D}}$. Тогда $\mathfrak{H}_i^0$ — плотно в $\mathfrak{H}_i$ и инвариантно относительно $\pi_{W_i}(\mathfrak{B})$. Пусть π_i^0 — представление $\mathfrak{B}$, индуцируемое на $\mathfrak{H}_i^0$. Представления π_1 и π_2 называются инфинитезимально эквивалентными если существует взаимно однозначное отображение α $\mathfrak{H}_1^0$ на $\mathfrak{H}_2^0$ такое, что $\pi_2^0(b)\alpha(\psi) = \alpha \times (\pi_1^0(b)\psi)$ для всех $b \in \mathfrak{B}$ и $\psi \in \mathfrak{H}_1^0$. Из эквивалентности двух представлений всегда следует их инфинитезимальная эквивалентность. Обратное справедливо для унитарных представлений в гильбертовых пространствах. Представление π_i называется инфинитезимально унитарным, если в $\mathfrak{H}_i^0$ можно ввести скалярное произведение (ψ, φ) такое, что по отношению к нему $\mathfrak{H}_i^0$ становится (возможно, неполным) гильбертовым пространством и $(\psi, \pi_i(X)\varphi) = -(\pi_i(X)\psi, \varphi)$ для всех $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}_i^0$ и $X \in \mathfrak{g}_0$. Пусть π — квазипростое неприводимое представление G в банаховом пространстве; если π инфинитезимально унитарно, то оно инфинитезимально эквивалентно унитарному представлению σ группы G в гильбертовом пространстве. Кроме того, σ единственно с точностью до эквивалентности и неприводимо. В заключение дается метод конструирования некоторого класса представлений группы G, представляющий собой обобщение методов Гельфанда и Наймарка. М. И. Граев

3087. Обобщенные примарные группы. I. II. Куликов Л. Я., Тр. Моск. матем. о-ва, 1953, № 2, 85—167

Часть I см. Тр. Моск. матем. о-ва, 1952, № 1, 247—326. Обобщенной примарной (по отношению к простому числу p) группой автор называет абелеву группу с кольцом операторов, являющимся либо кольцом Z_p всех целых p-адических чисел, либо кольцом K_p всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p.

Основной целью автора является отыскание необходимых и достаточных условий, при которых существует редуцированная обобщенная примарная группа A, имеющая заданную мощность $\mathfrak{m}$, тип τ и заданную последовательность обобщенных примарных без элементов бесконечной высоты групп $\{A_\lambda\}$, $\lambda < \tau$, в качестве последовательности ульмовских факторов (все группы рассматриваются с одним и тем же кольцом операторов Z_p или K_p). Если для произвольной группы G обозначить через $|G|$ мощность этой группы, а через $G[p]$ — совокупность всех элементов x группы G, удовлетворяющих условию $px = 0$, то основную теорему можно сформулировать так:

Для существования указанной выше группы A необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$1)\ \sum_{\lambda<\tau} |A_\lambda| \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \prod_{\lambda<\omega,\tau} |A_\lambda|,$$

$$2)\ |(p^n A_\lambda)[p]| \geqslant |A_{\lambda+1}/pA_{\lambda+1}|,$$

$$3)\ |A_\lambda|^{\aleph_0} \geqslant \sum_{\lambda\leqslant\nu<\tau} |A_\nu|. \qquad (\lambda+1<\tau,\ n<\omega),$$

В работе доказывается, что если каждая группа A_λ, $\lambda < \tau$, является примарной, то и группа A, получающаяся при доказательстве достаточности условий 1), 2), 3), также является примарной. Таким образом, найдены необходимые и достаточные условия для существования редуцированной примарной группы с заданной системой инвариантов. Полученная теорема со-

держит как частный случай теорему Цыпина о существовании счетной примарной группы с заданной системой инвариантов.

Из указанных выше основных результатов непосредственно выводится, что существуют (редуцированные) примарные группы, для которых последовательность ульмовских факторов не является полной системой инвариантов.

Далее рассматривается некоторый класс обобщенных примарных (редуцированных) групп, для которых последовательность ульмовских факторов образует полную систему инвариантов. Именно, обобщенная примарная группа H называется нормальной, если для всякой ее допустимой подгруппы E, имеющей конечное число образующих относительно кольца операторов группы, множество порядковых чисел α, для которых $E \cap H^\alpha \neq E \cap H^{\alpha+1}$, является конечным. Здесь под H^α понимается подгруппа группы H, определяемая индуктивно следующим образом: $H^0 = H$; $H^\alpha = \bigcap_{n<\omega} p^n H^{\alpha-1}$, если α — изолированное порядковое число; $H^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} H^\beta$, если α — предельное порядковое число. Доказывается, что теорема, аналогичная теореме Ульма, справедлива для класса нормальных редуцированных обобщенных примарных групп, имеющих счетное число образующих (относительно кольца операторов группы), и таких, что их ульмовские факторы разложимы в прямую сумму операторных циклических групп. Доказываемая теорема содержит как частный случай теорему Ульма для счетных примарных групп. В работе указывается, что усилить полученную теорему, отказавшись от условия нормальности или от условия о счетности системы образующих (относительно кольца операторов группы), нельзя. Вопрос о том, можно ли отказаться от условия, накладываемого на ульмовские факторы, остается открытым.

Кроме указанных выше основных результатов, реферируемая работа содержит еще целый ряд фактов.

В § 1 рассматриваются условия, при которых абелева группа допускает кольцо Z_p или K_p в качестве области операторов. В частности, оказывается, что всякая примарная (относительно простого числа p) группа допускает как кольцо операторов Z_p, так и кольцо операторов K_p, и, обратно, всякая периодическая абелева группа с кольцом операторов Z_p или K_p является примарной относительно p.

Там же рассматривается вопрос о том, когда подгруппа обобщенной примарной группы является допустимой, а также вопрос об условиях, при которых изоморфное или гомоморфное отображение одной обобщенной примарной группы на другую является операторным.

В § 2 изучаются полные группы. Доказывается, что полная абелева группа с кольцом операторов K_p (или Z_p) разлагается в прямую сумму квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе всех рациональных (рациональных p-адических) чисел.

Известно, что всякая абелева группа является подгруппой некоторой полной абелевой группы. Доказывается, что для любой абелевой группы G существует минимальная полная содержащая ее группа. Указываются некоторые условия, необходимые и достаточные для того, чтобы полная абелева группа, содержащая группу G в качестве подгруппы, была бы минимальной полной для G группой. Для обобщенных примарных групп получается следующий результат:

Для любой заданной обобщенной примарной группы G существует обобщенная примарная группа $P(G)$ с тем же кольцом операторов, которая является минимальной полной для G группой и содержит G в качестве допустимой подгруппы. Группа $P(G)$ определяется однозначно с точностью до операторных изоморфизмов, оставляющих все элементы группы G на месте.

В § 3 рассматриваются сервантные и изотипные подгруппы обобщенных примарных групп. Подгруппу C обобщенной примарной (по отношению к простому числу p) группы G автор называет изотипной, если $C \cap p^\alpha G = p^\alpha C$ для любого порядкового числа α. Здесь под $p^\alpha G$ понимается подгруппа группы G, определяемая индуктивно следующим образом; $p^0 G = G$; если α — изолированное число, то $p^\alpha G = p(p^{\alpha-1} G)$; если α — предельное порядковое число, то $p^\alpha G = \bigcap_{\beta<\alpha} p^\beta G$. Изучаются свойства сервантных и изотипных подгрупп и условия, при которых подгруппа сервантна или изотипна.

Вводится понятие плотной подгруппы обобщенной примарной редуцированной группы G: через $\tau^* = \tau^*(G)$ обозначается наименьшее порядковое число, для которого $p^{\tau^*} G = p^{\tau^*+1} G$; допустимая подгруппа C группы G называется плотной, если для всякого $\alpha < \tau^*$ группа G порождается подгруппами C и $p^\alpha G$. Доказывается, что редуцированная обобщенная примарная группа G и ее изотипная и плотная подгруппа C имеют один и тот же тип и одинаковые последовательности ульмовских факторов.

В § 4 рассматриваются базисные подгруппы обобщенной примарной группы G. Допустимая сервантная подгруппа C называется базисной подгруппой, если она разлагается в прямую сумму операторных циклических подгрупп и фактор-группа G/C полная. Доказывается, что любая обобщенная примарная группа имеет по крайней мере одну базисную подгруппу и что любые две базисные подгруппы одной и той же обобщенной примарной группы изоморфны.

Наконец, в § 11 на основании полученных в работе основных результатов решается вопрос о мощности множества всех неизоморфных дискретных абелевых групп, имеющих заданную бесконечную мощность $\mathfrak{m}$ (мощность этого множества оказывается равной $2^{\mathfrak{m}}$), а также вопрос о мощности множества всех неизоморфных бикомпактных абелевых групп, имеющих мощность $\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{n}}$, где $\mathfrak{n}$ — произвольное заданное бесконечное кардинальное число (мощность этого множества оказывается равной $\mathfrak{m}$). А. П. Мишина

3088. Группы подстановок формальных степенных рядов. Дженнингс (Substitution groups of formal power series. Jennings S. A.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 3, 325—340 (англ.)

Рассматривается множество T формальных степенных рядов вида

$$f(x) = x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

с коэффициентами из произвольного коммутативного и ассоциативного кольца R.

С каждым таким рядом $f(x)$ связывается преобразование $F: r(x) \to r(f(x))$ множества T, состоящее в формальной подстановке $x \to f(x)$.

Доказывается, что совокупность таких преобразований образует группу $\mathfrak{G}(R)$; если S — подкольцо кольца R или его идеал, то $\mathfrak{G}(S)$ — подгруппа или соответственно нормальный делитель группы $\mathfrak{G}(R)$, $\mathfrak{G}(R/S) \simeq \mathfrak{G}(R)/\mathfrak{G}(S)$.

С помощью убывающей цепочки определенного вида нормальных делителей в $\mathfrak{D}(R)$ вводится топология и доказывается, что $\mathfrak{G}(R)$ обобщенно нильпотентна, а при нильпотентности R — нильпотентна.

Более подробно изучаются случаи, когда R ть поле характеристики нуль или кольцо целых исел. А. И. Ширшов

089. **Один класс однородных пространств, обладающих инвариантной мерой. Понсе** (Une classe d'espaces homogènes possédant une mesure invariante. Poncet Jean), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 5, 553—554 (франц.)

Дается достаточное условие, при котором однородное пространство G/H смежных классов локально омпактной группы G по замкнутой подгруппе H облает инвариантной мерой. Условие гласит: какова бы была окрестность единицы V (в G), существует кая окрестность единицы U, что $HU \subset VH$.

М. И. Граев

090. **О пространственном вращении, связанном с преобразованием Лорентца. Лалан** (Sur la rotation spatiale associée a un cyclo de Lorentz. Lalan Victor), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 24, 2297—2299 (франц.)

См. РЖМат, 1955, 2375.

091 К. **Теория групп. Курош А. Г.** Изд. 2-е, 467 стр., М., Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1953, 16 р. 85 к.

Первое издание книги А. Г. Куроша вышло из пети в 1944 г.; второе издание, аннотируемое здесь, астолько существенно отличается от первого, что его полным основанием можно считать новой книгой.

Книга состоит из четырех частей, посвященных советственно основам теории групп, абелевым группам, оретико-групповым конструкциям, разрешимым и ильпотентным группам.

В первой части (главы I, II, III, IV, V) излагаются новные теоретико-групповые понятия и связанные ними предложения, в частности, основные свойства подупп, нормальных делителей, рядов подгрупп, прямых роизведений, гомоморфизмов и изоморфизмов, эндоорфизмов и автоморфизмов, групп с операторами, ободных групп и определяющих соотношений. Изжение здесь как, впрочем, и во всей книге, построено широком использовании идей изоморфизма и гомоорфизма групп.

Во второй части (главы VI, VII, VIII) изложена ория абелевых групп. Изучаются абелевы группы конечным числом образующих элементов, полные елевы группы, прямые суммы циклических групп, примарные группы без элементов бесконечной высоты, ешанные абелевы группы, некоторые классы абелех групп без кручения; даны результаты исследований юфера, Куликова, Ульма, а также некоторые ре-ультаты Бэра и других авторов.

Третья часть книги (главы IX, X, XI и XII) посвяена свободным произведениям и свободным группам, упам с конечным числом образующих, прямым проведениям и структурам, расширениям групп. Даны новные результаты исследований по этим вопросам к самого автора (например, теоремы о подгруппах сводного произведения и о центрально-изоморфных пролжениях прямых разложений), так и ряда других торов (например, теоремы Магнуса, Нильсена, Грко и др.). Обращает на себя внимание принадлежее автору построение теории прямых произведений упп на основе прямых разложений в структух.

Четвертая часть (главы XIII, XIV и XV) содержит орию разрешимых и нильпотентных групп. Изучаются ойства силовских подгрупп произвольных групп, кальные свойства групп, нормальные и инвариантные стемы подгрупп, разрешимые и обобщенно разримые группы, силовские π-подгруппы разрешимых упп, нильпотентные и обобщенно нильпотентные груп, локально нильпотентные группы, полные группы и ряд других классов групп. В основу четвертой части положена обзорная статья А. Г. Куроша и С. Н. Черникова «Разрешимые и нильпотентные группы» (Успехи матем. наук, 1947, 2, № 3, 18—59); в нее включены также многие результаты исследований по разрешимым и нильпотентным группам, опубликованные уже после появления этой статьи в печати.

В целом книга А. Г. Куроша в полной мере отражает современное состояние теории абстрактных групп, ее методы и ее основные результаты. В конце книги (стр. 441—461) помещен указатель литературы.

С. Н. Черников

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

3092. **О разрешимых расширениях полей алгебраических чисел. Ивасава** (On solvable extensions of algebraic number fields. Iwasawa Kenkichi), Ann. Math., 1953, 58, № 3, 548—572 (англ.)

Рассматривается следующая задача погружения полей: дано нормальное, сепарабельное расширение K/k с группой Галуа G и требуется найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы K было подполем нормального над k поля L, группа Галуа которого является предписанным расширением заданной группы N при помощи G.

Находятся условия на поле k, необходимые и достаточные для того, чтобы любая задача погружения с любой разрешимой группой N имела положительное решение. В случае поля характеристики 0 они таковы: 1) не существует некоммутативных алгебр с делением конечного ранга над k; 2) для любого простого числа p, любого нормального расширения K/k и любого натурального n существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, что α_i и их сопряженные мультипликативно независимы по модулю p-х степеней.

Для доказательства этого утверждения автор выводит условие погружаемости для случая элементарного абелева нормального делителя N. Пусть N есть прямое произведение циклических групп порядка p с образующими $u_1, \ldots, u_r$ и для $\sigma \in G$ $u_i^\sigma = u_1^{c_{i_1}(\sigma)} \ldots u_r^{c_{ir}(\sigma)}$.

Вопрос сводится к случаю, когда существует такое целочисленное представление $a_{ij}(\sigma)$ степени r группы G, что

$$a_{ij}(\sigma) \equiv c_{ij}(\sigma) \bmod p.$$

Пусть корень ζ степени p из 1 содержится в k; в прямом произведении r мультипликативных групп поля K определяются автоморфизмы

$$(\xi_1, \ldots \xi_r)^\sigma = \left(\ldots \prod_{j=1}^{r} \xi_j^{b_{ij}(\sigma)\sigma} \ldots\right), \quad \sigma \in G.$$

Если $\chi_1, \ldots, \chi_r$ — такие характеры N, что

$$\chi_i(u_j) = \zeta^{\sigma_{ij}},$$

то $(\chi_1(u_{\sigma,\tau}), \ldots, \chi_r(u_{\sigma,\tau}))$, где $u_{\sigma,\tau}$ — система множителей, определяющая заданное расширение N при помощи G, задает систему множителей в группе $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ с определенными выше автоморфизмами. Для того чтобы задача погружения имела решение, необходимо и достаточно, чтобы эта система множителей распадалась.

В заключение доказывается, что если поле k удовлетворяет сформулированным выше условиям 1) и 2), то группа Галуа его максимального разрешимого расширения может быть найдена и не зависит от свойств поля k.

Естественно, ни одно конечное расширение поля рациональных чисел не удовлетворяет условиям 1) и 2). Примером поля, удовлетворяющего этим условиям,

является поле всех корней из единицы и поле алгебраических функций одной переменной с алгебраически замкнутым полем констант. И. Р. Шафаревич

3093. Гауссовы суммы в конечных кольцах и их приложения. Лампрехт (Gausssche Summen in endlichen Ringen und ihre Anwendungen. Lamprecht Erich), Ber. Mathematiker-Tagung, Berlin, 1953, 179—185 (нем.)

Обзор результатов, изложенных в другой работе автора (РЖМат, 1953, 1097). И. Р. Шафаревич

3094. Алгебра и дифференциальное исчисление. Келер (Algebra und Differentialrechnung. Kähler Erich), Ber. Mathematiker-Tagung, Berlin, 1953, 58—163 (нем.)

Известно, что теория внешних дифференциальных форм находит себе применения далеко за пределами теории дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии. В частности, ее аппарат оказался существенным в топологии дифференцируемых многообразий, а также в ряде вопросов алгебраической геометрии, допускающих чисто алгебраическую формулировку. Целью реферируемой работы является алгебраическое построение теории внешних дифференциальных форм, позволяющее еще расширить область ее применения, включив сюда изучение строения произвольных полей и колец. Следует отметить, что заимствованные из дифференциального исчисления понятия уже появлялись иногда в алгебраических работах. Отличием реферируемой работы является попытка систематического использования в алгебре формальных приемов дифференциального исчисления. Содержание работы следующее:

Глава 1 содержит сводку нужных в дальнейшем известных алгебраических результатов и определения используемых автором терминов. Терминология статьи резко отличается от общепринятой и весьма затрудняет чтение. Примеры терминов: Wirklichkeit — коммутативное кольцо, в котором все элементы, не являющиеся делителями нуля, имеют обратные; Erscheinung — кольцо, обладающее единственным максимальным идеалом, и т. п. Все рассматриваемые кольца коммутативны. Если $R_1,\dots$, R_k — подмножества некоторого кольца Ω, то через $[R_1,\dots, R_k]$ обозначается подкольцо, порождаемое элементами всех этих подмножеств.

Глава 2 — Дифференциальное исчисление. Изоморфное отображение σ кольца R на некоторое кольцо R^σ (R и R^σ — подкольца одного и того же кольца) называется бесконечно малым смещением, если для любых двух элементов a и b кольца R имеет место равенство $(a^\sigma - a)(b^\sigma - b) = 0$; кольца R и R^σ называются бесконечно близкими, а разность $da = a^\sigma - a$ — дифференциалом элемента a. Совокупность дифференциалов da элементов $a \in R$ обозначается через dR. Если $R^{\sigma_1}, \dots, R^{\sigma_m}$ — кольца, бесконечно близкие к R, то кольцо

$$\Omega = [R, R^{\sigma_1}, \dots, R^{\sigma_m}] = [R, d_1R, \dots, d_mR], \qquad (1)$$

где $d_ia = a^{\sigma_i} - a$, называется инфинитезимальным кольцом порядка m для кольца R. Кольцо (1) называется общим m-кратным инфинитезимальным кольцом для R, если любое m-кратное инфинитезимальное кольцо кольца R является его гомоморфным образом (над R). Доказывается существование общего инфинитезимального кольца для любого заданного кольца R. Кольцо (1) называется m-кратным дифференциальным кольцом кольца R, если все отображения $a^{\sigma_i} \to a^{\sigma_j}$ являются бесконечно малыми смещениями соответствующих колец R_i. Общее m-кратное дифференциальное кольцо определяется аналогично общему инфинитезимальному кольцу. Доказывается существование общего дифференциального кольца для любого заданного R, также то, что исходные бесконечно малые смещени σ_i кольца R могут быть продолжены до бесконечн малых смещений всего кольца (1), если оно являетс общим дифференциальным кольцом для R. Элемент кольца (1), записываемые в виде однородных много членов степени k от дифференциалов d_ia элементов с коэффициентами из R, называются дифференциал ными формами степени k. Перечисленные определени могут быть обобщены и на случай бесконечного числ бесконечно малых смещений. Кроме общих дифферен циальных колец, с заданным кольцом R связывается дифференциальная алгебра (Differenzierung), определяе мая следующим образом: дифференциальными моном ми степени p называются символы вида $d(a_1,\dots, a_p)$ $bd(a_1, \dots, a_p)$, где $b, a_1, \dots, a_p$ — элементы из Порождаемая этими символами свободная абелев группа обращается в кольцо, если ввести умножени мономов с помощью формул

$$d(a_1, \dots, a_p)\cdot d(b_1, \dots, b_q) = d(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q),$$
$$cd(a_1, \dots, a_p)\cdot d(b_1, \dots, b_q) =$$
$$= d(a_1, \dots, a_p)\cdot cd(b_1, \dots, b_q) =$$
$$= cd(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q),$$
$$cd(a_1, \dots, a_p)\cdot c'd(b_1, \dots, b_q) =$$
$$= cc'd(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q).$$

Дифференциальной алгеброй называется фактор-коль этого кольца по идеалу, порождаемому его элементам вида

$(a+b)\,d(a_1, \dots, a_p) - ad(a_1, \dots, a_p) - bd(a_1, \dots, a$
$d(a+b) - da - db,\ d(ab) - adb - bda,\ d(a, b) + d(b,$

Если условиться записывать элементы дифференциал ной алгебры выражениями представителей из соотве ствующих им классов вычетов через дифференциальн мономы, то для элементов, записываемых сумма мономов одинаковых степеней, имеет место соотнош ние $\xi_p\eta_q = (-1)^{pq}\eta_q\xi_p$ (здесь p и q — степени моном входящих в запись элементов ξ_p и η_q). Операция в тия полного дифференциала в дифференциальн алгебре определяется формулой $d\xi = \Sigma\, d(b, c_1, \dots, c$ где $\xi = \Sigma\, m_{a_1\dots a_p}\, d(a_1, \dots, a_p) + \Sigma\, bd(c_1, \dots, c_p)$. Д элементов ξ_p и η_q указанного выше вида выполняет соотношение $d(\xi_p\eta_q) = d\xi_p\eta + (-1)^p\xi\cdot d\eta$; $d(d\xi) =$ для любого элемента ξ.

Главы 3—5 посвящены приложениям введенных главе 2 понятий к исследованию структуры пол Поле K называется алгебраическим над его подпол k, если оно порождается над k конечным числ образующих. Пусть $[K, dK]$ — дифференциаль алгебра поля K и $\mathfrak{A}$ — двусторонний идеал в н порождаемый дифференциалами элементов из k. Факт кольцо $[K, dK]/\mathfrak{a} = \left[K, \frac{d}{k}K\right]$ называется част дифференциальной алгеброй поля K над k. В содержится подмодуль $K\cdot\frac{d}{k}K$ из элементов, за сываемых в виде сумм дифференциальных моном первой степени. Если K алгебраическое над k, то э модуль имеет конечный ранг (над K), не меньший степень трансцендентности поля K над полем k. До зывается, что разность между этим рангом и степен трансцендентности совпадает с введенной А. Вей (Weil A., Foundations of algebraic geometry, New Yo 1948) степенью несепарабельности расширения. В слу

расширений, не являющихся сепарабельно порождаемыми, ранг $K\frac{d}{k}K$ равен минимальному числу образующих поля K над k. Этот результат аналогичен результату, полученному Зарисским (Zariski O., Trans. Amer. Math. Soc., 1947, 62, 1) для числа линейно независимых дифференцирований полей. Рассмотрение дифференциальных алгебр позволяет ввести понятие дифферента для любых расширений колец (глава 4). Заключительная глава содержит попытку алгебраического определения понятий целой дифференциальной формы и целого дифференциала поля, играющих основную роль в классической алгебраической геометрии. Предлагаемое определение основывается на том факте, что любое подкольцо поля K, обладающее единственным максимальным идеалом, порождает (вместе с дифференциалами его элементов) в бесконечно кратном дифференциальном кольце этого поля подкольцо, также обладающее единственным максимальным идеалом. Элементы, содержащиеся во всех таких кольцах, автор называет целыми инфинитезималами поля. Доказывается, что для любого поля с конечным числом образующих целые дифференциальные формы заданной степени составляют абелеву группу, также обладающую конечным числом образующих. А. И. Узков

3095. Замечания к одной из работ Мак-Коя. Штейнфельд (Megjegyzés N. H. McCoy egyik dolgozatához. Steinfeld Ottó), Magyar tud. akad. mat. és. fiz. oszt. közl, 1954, 4, № 1, 145—147 (венг.)

В работе Мак-Коя (McCoy N. H., Amer. J. Math., 1949, 71, 823—833) было приведено несколько эквивалентных определений простого идеала $\mathfrak{p}$, например: из $ab \subseteq \mathfrak{p}$, где a и b — идеалы кольца R, следует либо $a \subseteq \mathfrak{p}$, либо $b \subseteq \mathfrak{p}$; или из $\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \subseteq \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{l}_1$ и $\mathfrak{l}_2$ — левые (правые) идеалы, следует либо $\mathfrak{l}_1 \subseteq \mathfrak{p}$, либо $\mathfrak{l}_2 \subseteq \mathfrak{p}$. В настоящей работе показывается, что условие простоты идеала эквивалентно условиям, аналогичным указанным выше, но относящимся к главным левым (главным правым) идеалам. Оно эквивалентно также каждому из следующих условий: а) из $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{r}$ — правый, а $\mathfrak{l}$ — левый идеалы, следует либо $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{p}$, либо $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{p}$; а′) то же условие а), но лишь для главных правых и главных левых идеалов.

В заключение доказывается достаточно очевидное утверждение об эквивалентности следующих свойств идеала $\mathfrak{q}$: А) идеал $\mathfrak{q}$ строго простой, т. е. из $\alpha\beta \in \mathfrak{q}$, где α и β — элементы кольца R, следует либо $\alpha \in \mathfrak{q}$, либо $\beta \in \mathfrak{q}$; Б) из $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{q}$, где $\mathfrak{l}$ — левый, $\mathfrak{a}\mathfrak{r}$ — правый идеалы, следует либо $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{q}$, либо $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{q}$; Б′) свойство Б) выполняется для главных левых и главных правых идеалов. Е. Г. Шульгейфер

3096. Локально выпуклые топологические модули. Гика (Module topologice local convexe. Ghika Al.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P., Române. Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 1, 49—73 (рум.; резюме русс.)

Пусть E — модуль относительно кольца Δ с единицей ε, содержащего упорядоченное подкольцо A с той же единицей и с некоторыми дополнительными свойствами. Подмножество $K \subset E$ называется A-выпуклым, если $\alpha K + \beta K \subseteq (\alpha + \beta)K$ при любых $\alpha, \beta \in A$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Это свойство сохраняется при сдвигах и пересечениях. Если Δ коммутативно, то оно сохраняется и при гомотетиях. Отображение $\alpha \to |\alpha|$ из Δ в A называется абсолютным значением, если $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$, $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, $|\alpha| = 0$ эквивалентно $\alpha = 0$, и $|\varepsilon| = \varepsilon$. $\alpha \to |\alpha|$ есть абсолютное главное A-значение, если из $\alpha \in A$ следует, что $|\alpha| = \sup(\alpha, -\alpha)$. Часть $K\Delta$-модуля E A-центрированна, если $|\alpha| \cdot K = \alpha K$ при любом $\alpha \in \Delta$. Часть K называют A-расширяемой, если для любого $x \in E$ существует такой положительный регулярный элемент $\lambda \in A$, что $x \in \lambda K$ (Dieudonné J., Ann. École norm. supér., 1942, 59, 107).

Отображение $x \to \sigma(x)$ Δ-молуля E в A называется A-полунормой, если $\sigma(x+y) \leqslant \sigma(x) + \sigma(y)$ и $\sigma(\alpha x) = |\alpha| \sigma(x)$ при любых $x, y \in E$, $\alpha \in \Delta$. Топология в E называется канонической, если она задана полной системой окрестностей нуля, состоящей из множеств, определенных неравенствами $\sigma(x) \leqslant \lambda$, $\lambda \in A_+^*$, где A_+^* — множество положительных обратимых элементов из A. Δ-модуль E называется A-локально выпуклым, если существует полная система окрестностей нуля, состоящая из замкнутых, A-выпуклых, A-центрированных и A-расширяемых множеств. Если V — A-выпуклое, A-центрированное и A-расширяемое множество, то

$$\sigma_V(x) = \inf \{\lambda \mid \lambda \in A_+^*,\ x \in \lambda V\}$$

определяет A-полунорму. Если, кроме того, V замкнуто, то $V = \{x \mid \sigma_V(x) \leqslant \varepsilon\}$. Для того чтобы унитарный E-модуль Δ был A-локально выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы его топология была верхней границей канонических топологий, определенных семейством $(\sigma_i(x))$ A-полунорм. Для того чтобы E было A-локально выпукло и удовлетворяло аксиоме отделимости, необходимо и достаточно, чтобы $\bigcap_i \{x \mid \sigma_i(x) = 0\} = \{0\}$. Н. Я. Виленкин

3097. Голоморфная теория групп и колец. Рédei (Csoportok és gyürük holomorfelmélete. Rédei László), Magyar tud. akad mat. és. fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 1, 25—48 (венг.)

Автор отмечает ряд хорошо известных аналогий между некоторыми основными понятиями теории групп и теории колец. Некоторые из этих аналогий: «нормальный делитель ↔ идеал», «фактор-группа ↔ фактор-кольцо», «гомоморфизм группы ↔ гомоморфизм кольца» и т. д., являются сильными, т. е. соответствующие понятия действительно играют в обоих теориях одинаковые роли. С другой стороны, аналогию «автоморфизм группы ↔ автоморфизм кольца» автор считает очень слабой, так как автоморфизмы совсем не играют в общей теории колец той важной роли, которая принадлежит им в теории групп. С целью заменить эту слабую аналогию сильной автор исходит из сильной аналогии между внутренним автоморфизмом группы и парой умножений кольца P (слева и справа) на данный элемент α этого кольца; эта пара умножений называется внутренним парным гомотетизмом кольца. Сильным аналогом произвольного автоморфизма группы оказывается произвольный парный гомотетизм кольца, определяемый как такая пара отображений кольца P в себя, которая порождается умножениями P слева и справа на один и тот же элемент некоторого шрейерова расширения кольца P (т. е., по аналогии со шрейеровыми расширениями групп, такого расширения, в котором кольцо P остается идеалом). Парный гомотетизм a кольца P можно определить также как такую пару отображений $\alpha \to a\alpha$ и $\alpha \to \alpha a$ этого кольца в себя, что для любых элементов α, β из P выполняются равенства:

$$a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta,\ (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a,$$
$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta,\ (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a),$$
$$(\alpha a)\beta = \alpha(a\beta),\ (a\alpha)a = a(\alpha a).$$

Сумма $a + b$ и произведение ab двух парных гомотетизмов a, b кольца P определяются следующими равенствами, в которых α — произвольный элемент из P:

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha,\ \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b;$$
$$(ab)\alpha = a(b\alpha),\ \alpha(ab) = (\alpha a)b.$$

Сумма $a+b$ не всегда будет парным гомотетизмом; она, например, будет парным гомотетизмом, если a и b — сопряженные парные гомотетизмы, т. е. если $(a\alpha)\,b = a\,(\alpha b)$, $(b\alpha)\,a = b\,(\alpha a)$ для всех α из P. Можно говорить о максимальных кольцах попарно сопряженных парных гомотетизмов кольца P; эти кольца являются сильными аналогами группы всех автоморфизмов некоторой группы, но их может быть много различных. Пусть D — любое из этих колец. Тогда по аналогии с голоморфом группы определяется голоморф DP кольца P, определяемый кольцом D. Это будет множество пар (a, α), где $a \in D$, $\alpha \in P$, с операциями

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta),$$
$$(a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab, ab + a\beta + \alpha\beta).$$

Голоморф DP будет шрейеровым расширением кольца P, так как пары $(0, \alpha)$ составляют идеал, изоморфный P. Отметим, что кольцо P имеет, вообще говоря, много голоморфов.

Подкольцо A кольца P называется характеристическим, если оно является идеалом во всяком шрейеровом расширении этого кольца. Для этого достаточно, чтобы A было идеалом во всех голоморфах кольца P. Подкольцо A тогда и только тогда характеристично в кольце P, если оно допустимо по отношению ко всем парным гомотетизмам этого кольца.

Автор рассматривает далее сильную аналогию между совершенными группами и кольцами с единицей. Известно, что кольцо тогда и только тогда обладает единицей, если оно служит прямым слагаемым для каждого своего шрейерова расширения. Кольца с единицей можно охарактеризовать так же как такие кольца, всякий парный гомотетизм которых является внутренним; они обладают поэтому единственным голоморфом. Обратно, если кольцо выделяется прямым слагаемым в каком-либо из своих голоморфов, то оно обладает единицей.

Автор передоказывает также теорему Нагата (Nagata M., J. Math. Soc., Japan, 1951, 3, 330—344), в силу которой всякий простой идеал (т. е. такой идеал p, что для любых идеалов a, b из $ab \subseteq p$ следует или $a \subseteq p$, или $b \subseteq p$) характеристичен. Далее, всякий голоморф коммутативного кольца без делителей нуля сам коммутативен. С другой стороны, кольцо с нулевым умножением тогда и только тогда обладает единственным голоморфом, если коммутативно полное кольцо эндоморфизмов аддитивной группы этого кольца; если же в этом случае имеется несколько голоморфов, то среди них непременно встречаются и некоммутативные. А. Г. Курош

3098. Линейные функции на алгебрах простой характеристики. Цассенхаус (Trace functions on algebras with prime characteristic. Zassenhaus H a n s), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 10, 685—692 (англ.)

Функция $f(a)$, заданная на ассоциативной алгебре A над полем F характеристики $p > 0$ и принимающая значения из алгебраического замыкания F, называется линейной (trace function), если выполняются следующие условия:

$$f(a + b) = f(a) + f(b),\ f(\lambda a) = \lambda f(a),\ \lambda \in F,$$
$$f(ab) = f(ba),\ f(a^p) = f(a)^p.$$

Все линейные функции на данной алгебре A над полем F образуют модуль $T(A/F)$. Доказывается, что: 1) все линейные функции на A обращаются в нуль на радикале A, 2) если A есть прямая сумма алгебр A' и A'', то модуль $T(A/F)$ является прямой суммой модулей $T(A'/F)$ и $T(A''/F)$, 3) единственными линейными функциями на полной матричной алгебре над F являются целые кратные обычного следа матрицы. Из этого следует, что ранг модуля $T(A/F)$ над полем вычетов по модулю p равен числу неэквивалентных абсолютно неприводимых представлений A над F.

Этот результат применяется к случаю, когда A есть групповое кольцо конечной группы G над полем вычетов по модулю p. Линейную функцию на A можно отождествить с функцией, заданной на G, принимающей значения из некоторого поля характеристики p, постоянной на классах сопряженных элементов и удовлетворяющей условию $f(x^p) = f(x)^p$. Отсюда следует, что функция $f(x)$ определяется своими значениями на p-регулярных классах (т. е. на классах сопряженных элементов, порядки элементов которых взаимно просты с p). Доказывается, что ранг модуля $T(A/F)$ равен числу p-регулярных классов группы G. Этим дается новое доказательство теоремы Брауэра (Brauer R., Actualités scient. et industr., 1935, № 195) о числе абсолютно неприводимых представлений конечной группы над полем простой характеристики. И. Р. Шафаревич

3099. О непроводимых представлениях алгебр Ли над полями характеристики p. Сульдин А. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, **114**, № 2, 167—168

Рассматриваются представления алгебр Ли конечного ранга над полем характеристики p.

Доказывается, что степень абсолютно неприводимого представления такой алгебры меньше некоторого постоянного числа, зависящего от p и структуры алгебры. Устанавливается также, что в случае конечного поля число неприводимых представлений конечно, а если представления ищутся в бесконечном расширении основного поля, то мощность множества представлений совпадает с мощностью расширения. А. И. Ширшов

3100. Делители нуля в кольцах многочленов. Скотт (Divisors of zero in polynomial rings. Scott W. R.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 5, 336 (англ.)

Дается новое, очень простое доказательство следующей теоремы: Пусть $f(x)$ — делитель нуля в кольце многочленов $R[x]$ над коммутативным кольцом R; тогда существует элемент $c \neq 0$ из R, для которого $cf(x) = 0$. В. М. Курочкин

3101. Исследования по теории элементарных делителей. Гаджиев М. А., Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, № 3, 13—34

Основная теорема. Пусть в ассоциативном кольце K выполняются следующие четыре условия: 1) K содержит единицу; 2) K не содержит делителей нуля; 3) каждый односторонний идеал кольца K, порожденный конечным числом элементов, является главным; 4) для любой матрицы A с элементами из K можно подобрать такую однострочную матрицу φ_0 и такую одностолбцовую матрицу ψ_0, что элемент $\varphi_0 A \psi_0$ не имеет ни левых, ни правых (нетривиальных) делителей такого же вида ($\varphi A \psi$); тогда в K справедлива теорема об элементарных делителях.

Первые три условия, налагаемые на кольцо K, являются аксиомами кольца Прюфера. Доказывается, что все четыре условия выполняются в кольцах Тейхмюллера; таким образом в сформулированной теореме содержатся результаты об элементарных делителях Тейхмюллера, а также результаты Хельмера. Предварительно доказываются следующие утверждения:

1) Всякую прямоугольную матрицу над кольцом Прюфера можно умножением ее слева (справа) на обратимую матрицу привести к треугольному виду: ниже (выше) главной диагонали находятся нули.

2) Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — взаимно простые слева элементы кольца Прюфера R; тогда строку $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ можно дополнить, например, снизу $k-1$ строками до обратимой матрицы k-го порядка. Аналогичное утверждение справедливо и для взаимно простых справа эле-

ментов; столбец из них можно дополнить $k-1$ столбцами до обратимой матрицы k-го порядка.

Для того чтобы доказать, что в кольцах Тейхмюллера выполняется 4-е из перечисленных выше условий, автор подробно излагает теорию разложения каждого элемента такого кольца в произведение неразложимых элементов. Е. Г. Шульгейфер

3102. К теореме о цепях делителей в коммутативных кольцах. Сато (Zum Teilerkettensatz in kommutativen Ringen. Sato Hazimu), Proc. Japan. Acad., 1953, 29, 10—12 (нем.)

В произвольном коммутативном кольце $\mathfrak{R}$ идеал $\mathfrak{H}$ называется полупростым, если в $\mathfrak{R}/\mathfrak{H}$ нет отличных от нуля нильпотентных элементов. Основная теорема: В коммутативном кольце $\mathfrak{R}$ следующие два условия эквивалентны условию максимальности для идеалов: 1) выполняется условие максимальности для полупростых идеалов, 2) пусть у идеала $\mathfrak{A}$ имеется единственный такой простой делитель $\mathfrak{P}$, что между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{P}$ нет простых идеалов; в этом случае должно выполняться условие максимальности для идеалов между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{P}$. I. N. Herstein

Перевод из Math. Revs, 1953, **14**, № 10, 941

3103. Структура однородных цепей. Окума (Structure of homogeneous chains. Ohkuma Tadashi), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 1, 1—12 (англ.)

Цепь X, обладающая транзитивной группой автоморфизмов, называется однородной. Подцепь I цепи X называется интервалом в X, если из $a, b \in I$ и $a < c < b$ следует $c \in I$; если интервал однородной цепи сам является однородной цепью, то он называется однородным интервалом. Если для каждой пары элементов x, y однородной цепи X существует единственный автоморфизм, отображающий x на y, то X называется однородной цепью с единственными автоморфизмами. Однородная цепь X тогда и только тогда является однородной цепью с единственными автоморфизмами, когда в X не существует собственного однородного интервала. Однородная цепь с единственными автоморфизмами изоморфна подцепи цепи действительных чисел; точнее, она изоморфна упорядоченному множеству, образованному подгруппой аддитивной группы действительных чисел.

Интервал Z однородной цепи X называется регулярным, если для каждой пары элементов $x, y \in Z$ и каждого автоморфизма φ цепи X из $\varphi(x) \in Z$ следует $\varphi(y) \in Z$. Однородная цепь называется простой, если она не содержит регулярных интервалов. Цепь T, в которой каждый (ограниченный или неограниченный) интервал изоморфен всей цепи T, называется вполне однородной цепью. Для каждой пары элементов x и y ($x < y$) простой однородной цепи X, автоморфизмы которой не являются единственными, открытый интервал (x, y) изоморфен определенной вполне однородной цепи T. Эта цепь T называется связанной с цепью X. Для каждой простой однородной цепи X существует вполне однородная цепь T, связанная с X; X изоморфна одной из следующих четырех цепей: 1) S, 2) $S \oplus (\omega_\mu \circ T^+)$, 3) $(\hat{\omega}_\nu \circ T^+) \oplus S$, 4) $(\hat{\omega}_\nu \oplus \omega_\mu) \circ T^+$; здесь через $\oplus$ и $\circ$ обозначаются соответственно ординальные сумма и произведение (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1952, гл. I, § 8); $T^+ = 1 \oplus T$ (1 — присоединенный элемент); ω_μ — первое порядковое число, для которого не существует подцепи в T соответствующего типа; $\hat{\omega}_\nu$ — дуальное первому такому порядковому числу, что не существует этого типа подцепей в цепи, дуальной T; S — интервал T, зависящий от X. Условно полная однородная цепь X с единственными автоморфизмами изоморфна цепи целых чисел. Условно полная однородная цепь X либо изоморфна цепи целых чисел, либо каждый ее ограниченный открытый интервал изоморфен некоторому однородному линейному континууму T (вполне однородной условно полной цепи).

Регулярный интервал Y цепи X является однородным интервалом цепи X и существует такая однородная цепь α, что $X = \alpha \circ Y$.

Пусть Y — регулярный интервал однородной цепи X; между элементами цепи X вводится соотношение эквивалентности: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда для каждого автоморфизма φ цепи X из $\varphi(x) \in Y$ следует $\varphi(y) \in Y$. Множество α всех классов эквивалентных по Y элементов называется регулярным делителем цепи X. Регулярные делители образуют цепь $\mathfrak{A}^*$, называемую цепью гипериндексов. Цепь всех регулярных делителей $\mathfrak{A}$, имеющих непосредственно предшествующий делитель, называется цепью индексов исходной цепи X. Если $\alpha \in \mathfrak{A}$, то для каждого регулярного интервала $\mathfrak{M} \in \alpha$ и каждого регулярного интервала $\mathfrak{N}$, покрываемого $\mathfrak{M}$, однородная цепь $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ изоморфна некоторой цепи X_α. Эта цепь называется фактор-цепью цепи X, соответствующей регулярному делителю α. Пусть $\mathfrak{A}$ — цепь и каждому $\alpha \in \mathfrak{A}$ соответствует цепь X_α. Пусть $y_{\alpha,0}$ — фиксированный элемент из X_α. Лексикографическим произведением $\Pi_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha \langle y_{\alpha,0} \rangle$ называется множество всех функций f, определенных на $\mathfrak{A}$, со значениями $y_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$, причем множества $D_f = \{\alpha \in \mathfrak{A} / f(\alpha) \neq y_{\alpha,0}\}$ удовлетворяют условию обрыва убывающих цепочек; $f \leqslant g$ означает: если $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \mathfrak{A}$, то существует такое $\beta \leqslant \alpha$, что $f(\beta) < g(\beta)$. Каждую однородную цепь X можно включить в качестве подцепи в цепь X', представимую в виде лексикографического произведения $\Pi_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ простых однородных цепей X_α; здесь $\mathfrak{A}$ — цепь, изоморфная цепи индексов исходной цепи X, и каждая цепь X_α изоморфна фактор-цепи цепи X. Если в однородной цепи X каждое центрированное семейство интервалов имеет непустое пересечение, то цепь X разлагается в лексикографическое произведение своих фактор-цепей. А. Х. Лившиц

3104. О перестановочных Т-замкнутых операторах. Ханаи (On commutative T-closure operators. Hanai Sitiro), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 1, 17—19 (англ.)

Однозначное отображение $\varphi: a \to a^\varphi$ полной структуры S на себя называется T-замкнутым оператором на S, если

$$a \leqslant a^\varphi,\ (a \cup b)^\varphi = a^\varphi \cup b^\varphi,\ (a^\varphi)^\varphi = a^\varphi,\ 0^\varphi = 0$$

при любых $a, b \in S$. Через Φ обозначено множество всех T-замкнутых операторов на S. Результат последовательного применения T-замкнутых операторов φ и ψ также T-замкнут и называется произведением φ и ψ; оно обозначается через $\varphi\psi$. Если $\varphi, \psi \in \Phi$, то, положив $\psi < \varphi$ в том и только том случае, когда $a^\varphi \leqslant a^\psi$ для всех $a \in S$, мы тем самым частично упорядочиваем Φ. Относительно этого частичного упорядочения ($<$) множество Φ становится полной структурой. Следовательно, можно говорить об объединении и пересечении операторов ($\varphi \cup \psi$, $\varphi \cap \psi$). Операторы φ и ψ называются перестановочными, если $\varphi\psi = \psi\varphi$.

Изучаются условия перестановочности T-замкнутых операторов. Доказаны теоремы: 1) Если $\varphi\psi = \psi\varphi$, то $\varphi\psi = \varphi \cap \psi$; 2) $\varphi\psi = \psi\varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi\psi\varphi = \varphi\psi$ и $\psi\varphi\psi = \psi\varphi$.

Если $a^\varphi = a$, то элемент a называется φ-замкнутым. Множество φ-замкнутых элементов обозначается через C_φ. Д оказана теорема: $\varphi\psi = \psi\varphi$ тогда и только тогда,

когда из сравнимости элементов $a \in C'_\varphi$ и $b \in C'_\psi$ следует существование элемента из $C_\varphi \cap C_\psi$, лежащего между a и b (C'_φ и C'_ψ обозначают соответственно множества $C_\varphi \setminus (C_\psi \cap C_\varphi)$ и $C_\psi \setminus (C_\varphi \cap C_\psi)$].

Подмножество T в полной структуре S называется полной подструктурой в S относительно пересечения, если $0,1 \in T$ и наименьшие верхние грани в T для элементов из T совпадают с соответствующими наименьшими верхними гранями в S. Доказана теорема: Максимальное подмножество Ψ перестановочных элементов множества Φ является полной подструктурой в Φ относительно пересечения. Ю. И. Соркин

3105. О самодуальном множестве постулатов Бернштейна для булевых алгебр. Монтагью, Тарский (On Bernstein's self-dual set of postulates for Boolean algebras. Montague Richard, Tarski Jan), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 310—311 (англ.)

Показано, что система аксиом Бернштейна для булевых алгебр (Bernstein B. A., Bull. Amer. Math. Soc., 1916, 22, 458) не является независимой: каждая из аксиом $x + y = y + x$ и $xy = yx$ вытекает из остальных. Л. И. Головина

3106. Классификация упорядочений свободной коммутативной группы с N образующими. Тревизан (Classificazione dei semplici ordinamenti di un gruppo libero commutativo con N generatori. Trevisan Giorgio), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 1, 143—157 (итал.)

Описаны все неизоморфные упорядочения свободной абелевой группы с конечным числом образующих. Тем самым решена одна из проблем Биркгофа (Теория структур, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952, 314). Этот же результат независимо получен М. Н. Зайцевой (РЖМат, 1953, 98) Ю. И. Соркин

3107. О недезарговых плоскостях с транзитивной группой сдвигов. Андре (Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Andre Johannes), Math. Z., 1954, 60, № 2, 156—180 (нем.)

Конгруэнцией $\mathfrak{K}$ группы G называется такое множество собственных подгрупп группы G, что 1) каждый отличный от 0 элемент из G принадлежит одной и только одной подгруппе из $\mathfrak{K}$; 2) сумма любых двух различных подгрупп из $\mathfrak{K}$ равна G. Если элементы из G считать точками, а правые смежные классы по подгруппам из $\mathfrak{K}$ — прямыми, то при естественном определении инцидентности возникает абстрактная евклидова плоскость π (Скорняков, Успехи матем. наук, 1950, 6, № 6, 112—154). Группа G оказывается транзитивной группой сдвигов плоскости π (в терминологии автора π — подвижная плоскость: Translationsebene). Подвижные плоскости и только они являются веблен-ведербарновыми (в.-в.). Ядро конгруэнции $\mathfrak{K}$ (множество эндоморфизмов группы G, переводящих в себя подгруппы из $\mathfrak{K}$) будет телом, изоморфным ядру соответствующего в.-в. тела Q, т. е. множеству таких элементов $s \in Q$, что $s(ab) = (sa)b$, $s(a + b) = sa + sb$ для любых $a, b \in Q$. Исследуются подгруппы группы коллинеаций неальтернативной в.-в. плоскости. Описывается конструкция, обобщающая построение Цассенхауза (Zassenhaus H., Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1936, 11, 187—220) и позволяющая строить в.-в. тела, исходя из поля, допускающего нетривиальную конечную группу автоморфизмов. Л. А. Скорняков

См. также: 2989, 3020, 3036, 3045, 3112, 3131, 3132, 3134, 3175, 3201, 3355, 3356, 3376, 3405, 3441

ТОПОЛОГИЯ

3108. Стягиваемость симметрического произведения. Ганя (Contractibilitatea produselor simetrice. Ganea Tudor), Studii şi cercetări mat., 1953, 4, № 1—2, 23—28 (рум.)

Доказываются некоторые утверждения о стягиваемости симметрического произведения (степени) топологических пространств. Более сильные результаты изложены в последующей работе того же автора (см. реф. 3109). Ю. М. Смирнов

3109. Симметрические степени топологических пространств. Ганя (Symmetrische Potenzen topologischer Räume. Ganea Tudor), Math. Nachr., 1954, 11, № 4/5, 305—316 (нем.)

В работе доказаны некоторые теоремы о симметрических степенях, дающие ответ на проблемы α, γ и δ Борсука и Улама (Borsuk K., Ulam S., Bull. Amer. Math. Soc., 1931, 37, 875—882).

Пусть R — хаусдорфово топологическое пространство. Его n-й симметрической степенью $R(n)$ называется множество всех непустых подмножеств ξ пространства R, состоящих не более чем из n точек; топология в $R(n)$ определяется базой $\mathfrak{B}$, каждый элемент $\Gamma = \Gamma(G_1, \ldots, G_k)$ которой (где k — произвольное натуральное число, а $G_1, \ldots, G_k$ — непустые открытые множество пространства R) состоит из всех множеств $\xi = \{x_1, \ldots, x_r\} \in R(n)$, $r \leqslant n$, пересекающихся с каждым G_i, $i \leqslant k$, и содержащихся в $\bigcup_{i=1}^{k} G_i$. В этой топологии пространство $R(n)$ оказывается хаусдорфовым. Имеют место следующие утверждения:

1. Если пространство R обладает одним из следующих топологических свойств α), β), β'), β''), γ), δ), то этим же свойством обладает и любая его n-я симметрическая степень $R(n)$: α) уникогерентность (связное, локально связное пространство R уникогерентно, если пересечение любых двух его связных открытых множеств, в сумме составляющих все R, связно); β) односвязность в смысле Шевалле (связное локально связное пространство односвязно в смысле Шевалле, если все его накрывающие пространства тривиальны); β') стягиваемость в точку (R стягиваемо в точку x, если тождественное его отображение на себя гомотопно отображению всего R в точку x); β'') локальная стягиваемость (R локально стягиваемо, если для любой его точки x и любой ее окрестности Ox существует окрестность $Ux \subset Ox$, стягиваемая внутри Ox в точку x; γ) свойство быть абсолютным окрестностным ретрактом — в случае, если R — компакт конечной размерности; δ) свойство быть абсолютным ретрактом — в том же случае.

2. γ) если топологическое произведение R^n является канторовым многообразием, то канторовым многообразием является и $R(n)$; ε) для любого метрического пространства R со счетной базой имеет место равенство $\dim R^n = \dim R(n)$; η) если $R(n)$ локально стягиваемо, то локально стягиваемо и R. Ю. М. Смирнов

3110. О метризуемости косых произведений. Эттер Гриффин (On the metrizability of the bundle space. Etter D. O., Griffin Joh

S., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 466—467 (англ.)

С помощью доказанной референтом теоремы метризации (Успехи матем. наук, 1951, 6, № 6, 100—111) авторы доказывают, что пространство косого произведения в смысле Стинрода (Стинрод Н., Топология косых произведений, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1953, § 2) метризуемо, если метризуемы его базисное пространство и слой. Ю. М. Смирнов

3111. Теоретико-множественное описание нормальных топологий. Эллис (A set-theoretic description of normal topologies. Ellis David), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 6, 405—407 (англ.)

Дается довольно сложная характеристика сходимости в нормальных пространствах. Множество $M = \{x_\alpha\}$, обозначенное элементами какого-либо направленного частично упорядоченного множества A, называют сетью. Если R — топологическое пространство и $\{x_\alpha\} \subset R$, то говорят, что сеть $\{x_\alpha\}$ сходится к $x \in R$, если для любой окрестности Ox существует такое $\alpha \in A$, что $x_\beta \in Ox$, как только $\beta \geqslant \alpha$. Если $\{M_\alpha\}$ является сетью в множестве всех подмножеств пространства R, то по определению $\liminf M_\alpha = \bigcup_\alpha \bigcap_{\beta \geqslant \alpha} M_\beta$. Действительная функция f разделяет множества A и B из R, если $f(A) = 0$, $f(B) = 1$ и $f(R) \subset [0; 1]$. Пусть K_R — класс всех непрерывных определенных на топологическом пространстве R функций, каждая из которых разделяет по крайней мере два замкнутых непустых множества. Каждой точке $x \in R$ ставится в соответствие множество $K(x)$ всех таких функций $f \in K_R$, для каждой из которых существует такая окрестность Ox, что $f(Ox) = 0$. Если R вполне регулярно, то отображение f взаимно однозначно. Если же R нормально, то для сходимости сети $\{x_\alpha\} \subset R$ к точке $x \in R$ оказывается необходимым и достаточным, чтобы $\liminf K(x_\alpha) \supset K(x)$. Ю. М. Смирнов

3112. Частично упорядоченные топологические пространства. Уорд (Partially ordered topological spaces. Ward L. E. Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 144—161 (англ.)

Множество X называется квазиупорядоченным, если в нем введено рефлексивное и транзитивное отношение $\leqslant$. Для $x \in X$ положим $y \in L(x)$, если $y \leqslant x$; $y \in M(x)$, если $y \geqslant x$; $E(x) = L(x) \cap M(x)$. Квазиупорядоченным топологическим пространством (к. т. п.) называется топологическое пространство X, в котором введена полунепрерывная квазиупорядоченность, т. е. такая квазиупорядоченность, что для любого $x \in X$ множества $L(x)$ и $M(x)$ замкнуты. Квазиупорядоченность топологического пространства называется непрерывной, если множество таких пар $(x, y) \in X \times X$, для которых $x \leqslant y$, замкнуто в $X \times X$. Цепью автор называет подмножество квазиупорядоченного множества, все элементы которого попарно сравнимы между собой.

Доказывается ряд теорем о к. т. п. Исследуются, в частности, пространства, в которых максимальные цепи бикомпактны. Доказывается, например, что условие бикомпактности максимальных цепей равносильно следующему: $E(x)$ бикомпактно для любого $x \in X$, и любое замкнутое подмножество пространства X имеет максимальный и минимальный элементы.

Пусть X — хаусдорфово к. т. п. с бикомпактными максимальными цепями, f — непрерывное и сохраняющее порядок отображение пространства X в себя. Для того чтобы существовало такое бикомпактное множество $K \subset X$, что $K \subset E(x_0)$ для некоторого $x_0 \in X$ и $f(K) = \overline{K}$, необходимо и достаточно, чтобы для какого-либо $x \in X$ элементы x и $f(x)$ были сравнимы.

Автор доказывает также новую теорему об инвариантных множествах отображения связного и локально связного бикомпакта в себя, вводя в этом бикомпакте особым образом квазиупорядоченность. А. С. Шварц

3113. Обобщение непрерывности (Резюме докторских тезисов). Каргал (Generalizations of continuity. Abstracts of doctoral theses. Cargal Buchanan), Iowa State Coll. J. Sci., 1954, 28. № 3, 288—289 (англ.)

Рассматриваются отображения хаусдорфова пространства X, в котором каждая окрестность есть множество второй категории, в регулярное сепарабельное пространство Y. Вводятся определения, обобщающие обычные понятия непрерывности отображения, и формулируется ряд свойств указанных отображений, которые обобщают известные свойства непрерывных отображений (например, теорему о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных отображений и др.). Л. Д. Кудрявцев

3114. Замечание о монотонных свободно деформируемых отображениях. Кертис (A note on monotone deformation - free mappings. Curtis M. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 3, 437—438 (англ.)

Продолжение статьи автора (начало см. РЖМат, 1953, 625).

Автор формулирует теорему: если M — локально односвязный континуум, разбивающий n-мерную сферу S^n, и существует монотонная освобождающая деформация, сдвигающая M в одну из компонент множества $S^n \setminus M$, то эта компонента равномерно локально односвязна.

В приведенном доказательстве используется следующая лемма: Пусть X и Y — линейно связные, локально линейно связные топологические пространства, причем Y локально односвязно. Пусть далее f — монотонное отображение пространства X на Y. Тогда $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ есть отображение на всю группу $\pi_1(Y)$.

Утверждение этой леммы неверно, как показывает пример взаимно однозначного отображения f полуинтервала X на окружность Y. Поскольку доказательство теоремы опирается на неверную лемму, оно не представляется референту убедительным. С. С. Рышков

3115. О кривых, которые отображаются на окружность посредством гомеоморфизма, продолжаемого на R^3. Капуано (Sur les courbes dont l'homéomorphie avec une circonférence se prolonge à R^3. Kapuano Isaac), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 19, 1845—1847 (франц.)

Подмножества E и E_1 евклидова пространства R^3 называются абсолютно гомеоморфными, если существует гомеоморфизм h пространства R^3 на себя, при котором $h(E) = E_1$. Непрерывная деформация $f(x, t)$ ($x \in R^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$) пространства R^3 называется гомеоморфной (или изотопной), если отображение $f(x, t)$ гомеоморфно при любом $t \in [0,1]$.

Формулируются следующие теоремы: Если кривые C и C_1 гомотопны в области $D \subset R^3$ и каждая из них абсолютно гомеоморфна окружности, то существует гомеоморфная деформация, переводящая C_1 в C и оставляющая на месте точки $R^3 \setminus D$. Если, кроме того, C гомотопна нулю в $R^3 \setminus C_1$, то эту гомеоморфную деформацию можно осуществить так, чтобы точки C в процессе деформации оставались на месте.

Доказательства этих утверждений должны следовать из ряда лемм, приводимых без доказательства. Однако самые формулировки этих лемм неопределенны и часто непонятны, так как используют не объясненные в статье обозначения и понятия (например, полиэдры P_m в лемме E). А. Л. Лунц

3116. Пары пересекающихся континуумов в плоскости. I, II, III. Данжуа (Les couples de continus joints dans le plan. I, II, III. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 8, 561—564; № 11, 654—657; № 12, 685—687 (франц.)

Реферируемые три части статьи содержат доказательство следующей теоремы.

Пусть C и C' — два таких континуума в плоскости U_2, что множество $\Gamma = C \cap C'$ состоит из попарно не пересекающихся континуумов (или точек) Γ_i, $i = 1,\ldots, p$. Предположим еще, что $C \setminus \Gamma$ содержится в одной из компонент R' множества $U_2 \setminus C'$, а $C' \setminus \Gamma$ содержится в одной из компонент R множества $U_2 \setminus C$ (для $p = 1$ необходимо еще потребовать, чтобы $C \setminus \Gamma$ и $C' \setminus \Gamma$ принадлежали одной и той же компоненте ρ множества $U_2 \setminus \Gamma$). Тогда множество $R \cap R'$ непусто и состоит из p связных открытых попарно не пересекающихся множеств. При этом, если при $p \geqslant 2$ континуумы Γ_i таковы, что одна из компонент ρ_i множества, дополнительного к Γ_i, содержит все остальные континуумы Γ_j, то множество $\bigcap \rho_i = \rho$ есть непустое открытое связное множество.

Автор отмечает, что для случая $p = 1$ и $p = 2$ эта теорема была опубликована им без доказательства в 1911 г. (C. r. Acad. sci. 1911, **153**, 423, 493).

А. С. Пархоменко

3117. О некоторых типах переплетений. Хамстром (Concerning certain types of webs. Hamstrom Mary-Elizabeth), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 974—978 (англ.)

Рассматриваются W_3-множества (частный случай так называемых W_n-множеств, определение которых приводится в начале статьи (см. также РЖМат, 1955, 131). Доказываются теоремы: 1) существуют W_3-множества M с границей $B(M)$, имеющие дополнительную область, граница J которой содержит шесть предельных точек множества $B(M) \setminus J$; 2) никакое W_3-множество M не может иметь дополнительной области, граница J которой содержала бы семь предельных точек множества $B(M) \setminus J$.

Р. Ю. Мацкина

3118. Определение максимального числа областей соседства на неориентируемых поверхностях. Рингель (Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen. Ringel Gerhard), Math. Ann., 1954, **127**, № 2, 181—214 (нем.)

Подробно доказаны результаты, кратко изложенные автором ранее (РЖМат, 1954, 3643). Пусть F_q — замкнутая неориентируемая поверхность рода q (т. е. эйлеровой характеристики $2 - q$). Через ν_q обозначается максимальное число областей соседства поверхности F_q, т. е. наибольшее из всех чисел ν, для которых существует разбиение поверхности F_q на ν многоугольных областей, попарно имеющих хотя бы одно общее ребро. Известно (РЖМат, 1954, 3643), что $\nu_q \leqslant M(q)$, где

$$M(q) = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2}\right].$$

В работе доказано, что при $q \neq 2$ имеет место равенство $\nu_q = M(q)$, а также приведены некоторые следствия этой теоремы. Для некоторых значений числа q, в частности для $q \leqslant 9$, эта теорема была известна ранее. Доказательство равенства $\nu_q = M(q)$ основано на следующих соображениях. Пусть замкнутая поверхность F разбита на $(m-1)$-угольники, число которых равно m, причем каждые два многоугольника имеют точно одно общее ребро, а в каждой вершине сходятся по три ребра. В этом случае говорят, что поверхность F допускает разбиение $\mathfrak{Z}_m$. Занумеруем многоугольники разбиения $\mathfrak{Z}_m$ числами $1,2,\ldots, m$. Если мы один раз обойдем контур многоугольника с номером i, выписывая один за другим номера смежных многоугольников, то получим некоторую циклическую перестановку чисел $1,2,\ldots, i-1, i+1,\ldots, m$. Считая $i = 1,2,\ldots, m$, мы получим таким образом m перестановок, совокупность которых автор называет S_m-схемой. Эта схема может быть «ориентируемой» и «неориентируемой». Схема S_m может существовать только при условии $m \not\equiv 2 \pmod 3$. Из существования неориентируемой схемы S_m следует, что неориентируемая поверхность рода $q' = (m-3)(m-4)/6$ допускает разбиение $\mathfrak{Z}_m$ и потому $\nu_{q'} \geqslant m$.

Если q — такое число, что $M(q) \not\equiv 2 \pmod 3$ и существует схема S_m для $m = M(q)$, то $q \geqslant q'$ и, следовательно, $M(q) \geqslant \nu_q \geqslant \nu_{q'} \geqslant m = M(q)$, т. е. $\nu_q = M(q)$. Далее автор предпринимает сложное комбинаторное исследование, позволяющее утверждать существование схем S_m для ряда значений m. В частности, для каждого m, удовлетворяющего условиям $m \not\equiv 2 \pmod 3$, $6 \leqslant m \neq 7$, существует неориентируемая схема S_m. Таким образом, если $M(q) \not\equiv 2 \pmod 3$, причем $q \geqslant 5$, то равенство $\nu_q = M(q)$ имеет место. Для оставшегося неисследованным случая $M(q) \equiv 2 \pmod 3$ автор рассматривает вместо разбиений $\mathfrak{Z}_m$ другие разбиения $\mathfrak{Z}_m^{(-1)}$. Говорят, что замкнутая поверхность F допускает разбиение $\mathfrak{Z}_m^{(-1)}$, если ее можно таким образом разбить на m многоугольных областей, что каждые два многоугольника, кроме двух первых, имеют ровно одно общее ребро, а первые два многоугольника общих ребер не имеют. Разбиению $\mathfrak{Z}_m^{(-1)}$ также соответствует совокупность циклических перестановок, называемая схемой $S_m^{(-1)}$. Из существования схемы $S_m^{(-1)}$ следует, что некоторая поверхность с эйлеровой характеристикой $\chi = -(m^2 - 7m - 2)/6$ допускает разбиение $\mathfrak{Z}_m^{(-1)}$. Из этого легко следует, что на поверхности, получающейся из F вклеиванием листа Мебиуса, т. е. на неориентируемой поверхности рода $q'' = (m^2 - 7m + 16)/6$ существует m областей соседства.

Если q — такое число, что $M(q) \equiv 2 \pmod 3$, $M(q) > 5$, и существует схема $S_m^{(-1)}$ для $m = M(q)$, то $q \geqslant q''$ и, следовательно, $M(q) \geqslant \nu_q \geqslant \nu_{q''} \geqslant m = M(q)$, т. е. $\nu_q = M(q)$. Для каждого m, удовлетворяющего условиям $m \equiv 2 \pmod 3$, $m \geqslant 8$, существует схема $S_m^{(-1)}$. Таким образом, если $M(q) \equiv 2 \pmod 3$, причем $q \geqslant 4$, то равенство $\nu_q = M(q)$ имеет место. В. Г. Болтянский

3119. О теории графов. Туран (On the theory of graphs. Turán P.), Colloq. math., 1954, **3**, № 1, 19—30 (англ.)

Лекция, прочитанная автором в Математическом институте Польской академии наук в октябре 1952 г. Упоминается ряд результатов различных авторов по теории симметричных нерефлексивных графов (т. е. графов с ненаправленными ребрами, не содержащих петель). Сформулированы некоторые проблемы. В конце статьи автор приводит упрощенное доказательство следующей теоремы, опубликованной им в 1941 г. (Mat. és phys. lapok, 1941, **48**, 436—452). В классе $A_k(n)$ всех n-вершинных графов, не содержащих полных k-вершинных подграфов, $3 \leqslant k \leqslant n$, имеется единственный максимальный граф $D(n, k)$. Граф $D(n, k)$ имеет n вершин, обозначенных числами $1,2,\ldots, n$; ребро, соеди-

няющее i-ю и j-ю вершины, принадлежит этому графу в том и только в том случае, когда $i \not\equiv j \pmod{k-1}$.
В. Г. Болтянский

3120. О теореме разложения Петерсена. Беблер (Über den Zerlegungssatz von Petersen. Baebler F.), Comment. math. helv., 1954, 28, № 2, 155—161 (нем.)

Доказывается новым более коротким способом известная теорема Петерсена (Petersen J., Acta Math., 1891, 15, 193—220) о разложении регулярных конечных кубических графов на регулярные подграфы.
Л. Д. Кудрявцев

3121. Понижающие размерность отображения выпуклых множеств. Соргенфри (Dimension lowering mappings of convex sets. Sorgenfrey R. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 179—181 (англ.)

Доказываются четыре теоремы о диаметрах прообразов точек при непрерывных отображениях выпуклых множеств в пространства меньшего числа измерений.

Теорема 1. Если компактное выпуклое множество K размерности n отображено в евклидово пространство E^{n-1}, то полный прообраз некоторой точки из E^{n-1} имеет диаметр не меньший w, где w — ширина множества K (минимум расстояния между параллельными опорными плоскостями).

Теорема 2. Если компактное выпуклое множество K размерности $n > 3$, имеющее ширину w, отображено в множество F размерности $m \leqslant (n-2)/2$, то полный прообраз некоторой точки из F имеет связную часть, диаметр которой не меньше w.

Теорема 3. Если плоское выпуклое множество K ширины w отображено в одномерное множество F, то полный прообраз некоторой точки из F содержит связную часть, диаметр которой не меньше $w\sqrt{3}/3$.

Теорема 4. Если множество K в теореме 3 центрально-симметрично, то последняя оценка повышается до $w\sqrt{3}/2$.
В. А. Ефремович

3122. Об одной теореме Дайсона. Лившс (On a theorem of F. J. Dyson. Livesay George R.), Ann. Math., 1954, 59, № 2, 227—229 (англ.)

Доказывается комбинаторно-топологическая теорема действительной функции, определенной на n-мерной сфере S^n. Из нее при $n=2$ выводится следствие: Пусть f — непрерывная функция, отображающая S^2 в отрезок $[-1, 1]$ и пусть $0 < \theta \leqslant 90°$. Тогда существуют два таких диаметра сферы, составляющих угол θ, что в их концах y_1, y_2, y_3, y_4 функция f имеет одинаковые значения. Это следствие является обобщением теоремы Дайсона (Dyson F. J., Ann. Math., 1951, 54, 534—533).
В. А. Ефремович

3123. Обобщение теоремы Жордана — Брауэра — Александера. Тамура (Jordan-Brower-Alexander の定理の擴張について（續）. 田村祥), 數學 (Сугаку), 1953, 5, № 1, 10—24 (япон.)

Во второй части работы (реферат на первую часть см. РЖМат, 1954, 2900) автор вводит аксиому непрерывности в n-мерном пространстве R^n и доказывает, что всякое топологическое $(n-1)$-мерное псевдомногообразие, расположенное в пространстве R^n, разбивает его.

В четвертой главе к аксиомам соединения и порядка в R^n добавляется следующая аксиома непрерывности: одномерный симплекс компактен. Эта аксиома предполагается в дальнейшем выполненной.

В пятой главе доказываются гомологические леммы. Доказано, в частности, следующее предложение. Пусть A и B — замкнутые в R^n множества, z^r — цикл, лежащий в $R^n \setminus (A \cup B)$, а u^{r+1} и v^{r+1} — такие цепи, лежащие в $R^n \setminus A$ и $R^n \setminus B$ соответственно, что $\rho(u^{r+1}) \equiv \rho(v^{r+1}) \equiv z^r$. Тогда из гомологии $u^{r+1} + v^{r+1} \sim 0$ в $R^n \setminus (A \cap B)$ следует гомология $z^r \sim 0$ в $R^n \setminus (A \cup B)$.

В шестой главе по сути дела определяется и изучается коэффициент зацепления $\flat(z^r, S^{n-r-1})$ по модулю 2, где S^{n-r-1} — граница $(n-r)$-мерного симплекса (симплекс понимается в смысле аксиоматики в R^n; см. РЖМат, 1954, 2900).

Наконец, в седьмой главе обычным образом определяются комбинаторные псевдомногообразия (симплексы в смысле аксиоматики в R^n). Доказывается, что топологическое $(n-1)$-мерное псевдомногообразие M (т. е. топологический образ $(n-1)$-мерного комбинаторного псевдомногообразия), расположенное в пространстве R^n, разбивает это пространство на две области, имеющие M своей границей. Доказывается также, что эта теорема остается справедливой, если при определении псевдомногообразия условие правильного примыкания симплексов в комплексе заменить более общим условием.
В. Г. Болтянский

3124. Гомологии второй симметрической степени. Стейн (Homology of the two-fold symmetric product. Stein S. K.), Ann. Math., 1954, 59, № 3, 570—583 (англ.)

Пусть Y — вторая симметрическая степень некоторого полиэдра K. Автор изучает группы гомологий полиэдра Y, находит его числа Бетти, коэффициенты кручения и полином Пуанкаре. Например, полином Пуанкаре полиэдра Y оказывается равным $[p(t)^2 + p(t^2)]/2$, где $p(t)$ — полином Пуанкаре полиэдра K.
М. М. Постников

3125. О сумме индексов совпадений двух отображений. Вейер (Sur la somme d'indices des coïncidences de deux représentations. Weier Josef), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 9, 609—610 (франц.)

Пусть Q и R — компактные n-мерные многообразия, а g и h — непрерывные отображения многообразия Q в R, имеющие лишь конечное число совпадений (совпадениями называются корни уравнения $g(x) = h(x)$). Для каждого совпадения определен его индекс. Автор дает эскиз доказательства теоремы о гомотопической инвариантности суммы индексов совпадений. Центральным пунктом доказательства является следующее утверждение: если g_i и h_i, $i = 0, 1$ — отображения, имеющие лишь конечное число совпадений, причем g_0 и h_0 соответственно гомотопны g_1 и h_1, то их можно соединить такими деформациями g_t и h_t, что при любом t отображения g_t и h_t имеют лишь конечное число совпадений. Утверждение это приведено без доказательства. Аналогичное утверждение, относящееся к неподвижным точкам, использовано автором в другой работе (РЖМат, 1955, 139), но также там не доказано.

Примечание референта. Для случая триангулируемых многообразий сформулированная в работе теорема вытекает из результатов Фуллера (РЖМат, 1955, 645).
В. Г. Болтянский

3126. Характеристические классы и дифференциальные формы. Аранъоль (Classes caractéristiques et formes différentielles. Aragnol André), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 25, 2387—2389 (франц.)

Пусть T — пучок евклидовых пространств, т. е. косое произведение, базой которого служит некоторый комплекс K, слоем — n-мерное евклидово пространство E^n, а структурной группой — группа вращений пространства E^n. Для любого p $(0 \leqslant p \leqslant n-1)$ обозначим через $R(p)$ множество всех ортонормальных $(n-p)$-

реперов слоев E^n. Множество $R(p)$ является косым произведением с базой K и слоем — многообразием Штифеля Y^p. Пусть f — некоторая секущая поверхность косого произведения $R(p)$ над p-мерным остовом K^p комплекса K. Естественное отображение $R(p) \to R(p+1)$, заключающееся в отбрасывании последнего вектора реперов, переводит f в секущую поверхность произведения $R(p+1)$ над K^p. Распространив эту секущую поверхность на K^{p+1}, мы получим секущую поверхность $\overline{f}$ произведения $R(p+1)$ над K^{p+1}. В пространстве $H^p(f)$ всех единичных векторов, нормальных к реперам секущей поверхности $\overline{f}$ (это пространство является пучком p-мерных сфер над K^{p+1}), определим над K^p секущую поверхность, отнеся любой точке x остова K^p последний вектор репера $f(x)$. Оказывается, что после возможного приведения по mod 2 препятствие $c_{p+1}(f, \overline{f})$ к распространению этой секущей поверхности совпадает с характеристическим циклом Уитни косого произведения T.

Автор определяет в пространствах $R(p)$ и $R(p+1)$ такие дифференциальные формы Π^p и Ω^{p+1} соответственно, что для любой $(p+1)$-мерной цепи γ^{p+1} комплекса K имеет место равенство

$$\int_{\gamma^{p+1}} \Omega^{p+1} = c_{p+1}(f, \overline{f})\,\gamma^{p+1} + \int_{\partial\gamma^{p+1}} \Pi^p,$$

где $\int_{\gamma^{p+1}} \Omega^{p+1}$ обозначает интеграл формы Ω^{p+1} по цепи $\overline{f}\gamma^{p+1}$, а $\int_{\partial\gamma^{p+1}} \Pi^p$ — интеграл формы Π^p по цепи $f\partial\gamma^{p+1}$ ($\partial\gamma^{p+1}$ — граница цепи γ^{p+1}).

В резюме указано, что формула автора содержит как частный случай известные формулы, связывающие характеристику Эйлера-Пуанкаре с дифференциально-геометрическим строением многообразия.

М. М. Постников

3127. О гомотопических группах пространств с единственной нетривиальной группой гомологий. Мур (On homotopy groups of spaces with a single non-vanishing homology group. Moore John C.), Ann. Math., 1954, **59**, № 3, 549—557 (англ.)

Пространство X называется пространством гомологического типа (G, n), где G — некоторая абелева группа, а n — целое число, большее единицы, если это пространство линейно связно, односвязно, ациклично (в смысле сингулярных гомологий) во всех размерностях, кроме n, а его n-мерная целочисленная группа сингулярных гомологий $H_n(X)$ изоморфна группе G. Гомотопические группы пространств гомологического типа (G, n) зависят только от G и n и обозначаются через $\pi_q(G, n)$. Легко видеть, что для $q < 2n-2$ группы $\pi_q(G, n)$ и $\pi_{q+1}(G, n+1)$ изоморфны. Автор находит и некоторые другие соотношения между группами $\pi_q(G, n)$.

Во второй части статьи автор изучает некоторые пространства, связанные со сферами (получающиеся применением операций построения универсальных накрытий и пространств, уничтожающих гомотопические группы). Получено много результатов о гомотопических и гомологических группах этих пространств. Приведем здесь только одну теорему, относящуюся непосредственно к сферам:

Примарная по p компонента q-мерной гомотопической группы n-мерной сферы, где n нечетно и больше трех, циклична, если $q = n+2p-3$, $n+4p-5$, и тривиальна, если $q < n+6p-8$. Примарная по p компонента q-мерной гомотопической группы трехмерной сферы циклична, если $q = 2p$, $4p-3$, $4p-2$, $6p-5$, $6p-4$, и тривиальна, если $q < 8p-8$.

М. М. Постников

3128. О $(n+2)$-типе $(n-1)$-связного полиэдра $(n \geqslant 4)$. Уайтхед (On the $(n+2)$-type of an $(n-1)$-connected complex $(n \geqslant 4)$. Whitehead J. H. C.), Proc. London Math. Soc., 1954, 4, № 13, 1—23 (англ.)

Пусть X — такое связное клеточное разбиение (CW-комплекс), что $\pi_i(X) = 0$ для всех i, меньших некоторого $n \geqslant 4$. Положим $H_n = \pi_n(X^n) / \partial\pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n)$, где ∂ — граничный гомоморфизм, и $\Pi_{n+1} = i_*\pi_{n+1} \times (X^{n+1})$, где $i_* : \pi_{n+1}(X^{n+1}) \to \pi_{n+1}(X^{n+2})$ — гомоморфизм вложения. Компонируя нетривиальный элемент группы $\pi^{n+1}(S^n)$ со всеми элементами группы $\pi^n(X^n)$, автор получает гомоморфизм $\pi^n(X^n) \to \pi^{n+1}(X^n)$. Этот гомоморфизм порождает некоторый гомоморфизм $\mathbf{t}$ группы H_n в группу Π_{n+1}. Доказывается, что гомоморфизм $\mathbf{t}$ полностью характеризует $(n+2)$-тип полиэдра X. Имеет место также соответствующая теорема реализации. Поставлен и частично решен вопрос о вычислении гомотопических инвариантов (в частности, групп гомологий) полиэдра X в терминах гомоморфизма $\mathbf{t}$.

М. М. Постников

3129. О хопфовском инварианте составного элемента. Хилтон (On the Hopf invariant of a composition element. Hilton P. J.), J. London, Math. Soc., 1954, **29**, part 2, № 114, 165—171 (англ.)

Пусть $H^* : \pi_r(S^n) \to \pi_{r+1}(S^n)$ — хопфовский инвариант в смысле Хилтона (Hilton P. J., Proc. London Math. Soc., 1951, **3**, № 1, 462—493). Доказано, что для любых $\beta \in \pi_p(S^n)$, $\gamma \in \pi_r(S^p)$ имеет место соотношение $H^*(\beta \circ \gamma) = H^*(\beta) \circ E\gamma + E^n\beta \circ E^p\beta \circ H^*\gamma$, где E — надстройка в смысле Фрёйденталя. Частные случаи этой формулы были доказаны ранее Уайтхедом и автором.

М. М. Постников

3130. Когомотопические и равномерные когомотопические группы. Миядзаки (The cohomotopy and uniform cohomotopy groups. Miyazaki Hiroshi), Tôhoku Math. J., 1953, 5, № 2, 83—103 (англ.)

Известная теория когомотопических групп компактов переносится на случай любых паракомпактных пространств. В зависимости от типа положенной в основу гомотопии (обыкновенной или равномерной) возникают два типа когомотопических групп: обыкновенные и равномерные.

В добавлении, сделанном при правке корректуры, автор отмечает, что аналогичные результаты были независимо получены Морита.

М. М. Постников

3131. Двойственные задания группы узла. Торрес, Фокс (Dual presentations of the group of a knot Torres G., Fox R. H.), Ann. Math., 1954, 59, № 2, 211—218 (англ.)

Зейферт доказал (Seifert H., Math. Ann., 1934, 110, 571—592), что многочлен Александера простого узла является симметрическим многочленом четной степени. Этот факт был обобщен Торресом (РЖМат, 1953, 133) для случая узлов произвольной кратности. Из зейфертовского доказательства вытекает, что матрица Александера (по поводу определения этой матрицы см. РЖМат, 1955, 1667) простого узла сама является симметрической в некотором смысле. В реферируемой работе устанавливается свойство симметрии матриц Александера для узлов произвольной кратности. В частности, указанные выше результаты Зейферта и Торреса получают более простые доказательства.

В реферате сохраняются терминология и обозначе-

ния, введенные в рефератах работ Фокса (РЖМат, 1955, 1666, 1667). Пусть F — произвольная мультипликативная группа. Если $u = \Sigma a_i f_i \in JF(f_i \in F,\ a_i$ — целые числа), то элемент $\bar{u} = \Sigma a_i f_i^{-1}$ называется сопряженным элементу u. Два задания $(x_1, \ldots, x_n : r_1, \ldots, r_m)$ и $(y_1, \ldots, y_n : s_1, \ldots, s_m)$ группы G называются двойственными, если $x_i \equiv y_i^{-1} (\mathrm{mod}\ \psi\varphi)$, т. е. $\psi\varphi(x_i) = \psi\varphi(y_i^{-1})$ и $\frac{\partial r_j}{\partial x_i}(x_i - 1) \equiv \overline{\frac{\partial s_i}{\partial y_j}}(y_j - 1) \pmod{\psi\varphi}$, $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Основная теорема авторов заключается в том, что группа узла произвольной кратности в трехмерном пространстве имеет двойственную пару заданий. Построение такой пары заданий эффективно (и притом чрезвычайно просто, если задана регулярная проекция рассматриваемого узла). Из этой теоремы вытекает, что группа простого узла в трехмерном пространстве имеет такое задание, для которого матрица Александера эквивалентна своей сопряженной транспонированной; таким образом, элементарные идеалы $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots$ инвариантны при замене матрицы Александера сопряженной ей матрицей. В качестве дальнейших следствий авторы приводят указанные выше результаты Зейферта и Торреса о многочленах Александера.

В заключение авторы ставят следующие проблемы: достаточны ли доказанные алгебраические свойства для того, чтобы заданный идеал (многочлен) был идеалом (многочленом) Александера некоторого узла? В. Г. Болтянский

3132. О понтрягинском произведении в пространствах путей. Ботт, Замельсон (On the Pontryagin product in spaces of paths. Bott R., Samelson H.), Comment. math. helv., 1953, **27**, № 4, 320—327 (англ.)

В пространстве петель Ω линейно связного односвязного пространства X определено умножение, позволяющее определить операцию умножения в группе гомологий $H(\Omega)$. В результате этого группа $H(\Omega)$ превращается в так называемую понтрягинскую алгебру $H_*(\Omega)$. В работе изучается связь понтрягинской алгебры со спектральной последовательностью Лере. В качестве одного из приложений определяется понтрягинская алгебра для случая, когда X есть букет сфер (различных размерностей).

В первом разделе авторы несколько видоизменяют определение спектральной последовательности, данное Серром (Serre J.-P., Ann. Math., 1951, 54, 425—505). Сингулярный куб назовем p-вырожденным, если он не зависит хотя бы от одной из своих последних p координат. Множество всех p-вырожденных кубов обозначается через $D^{(p)}$. Положим $D^{(\infty)} = D^{(1)} \cup D^{(2)} \cup \ldots$ (в цитированной статье Серра рассматривались 1-вырожденные кубы). Пусть P — расслоенное пространство. Через $Q(P)$ обозначается свободная абелева группа, порожденная всеми сингулярными кубами пространства P, а через $C(P)$ — группа $Q(P) / D^{(\infty)}$. Группа цепей $C(P)$ фильтруется при помощи подгрупп $A^r(P) = (T^r(P) + D^{(\infty)}) / D^{(\infty)}$, где $T^r(P)$ — подгруппа группы $Q(P)$, состоящая из кубов фильтрации r. Дальнейшее построение спектральной последовательности проводится обычным путем (с заменой группы $D^{(1)}$ группой $D^{(\infty)}$). Первые члены E_0, E_1, E_2 и дифференциалы d_0, d_1 получают такое же описание, какое дано в цитированной статье Серра.

Естественно определенное отображение μ: $Q(X) \otimes Q(Y) \to Q(X \times Y)$ коммутирует с дифференциалом $d = d \otimes 1 + \omega \otimes d$, где $\omega = (-1)^m$ для сингулярных кубов и цепей размерности m в X. Отображение μ является цепной эквивалентностью (это доказывается с применением обычной фильтрации в произведении $X \times Y$). Отображение μ индуцирует отображение группы $H(X) \otimes H(Y)$ в $H(X \times Y)$ для любого кольца R с единицей в качестве области коэффициентов. Если R есть кольцо главных идеалов, то справедлива формула Кюннета для сингулярных гомологий: μ_* изоморфно вкладывает $H(X) \otimes H(Y)$ в $H(X \times Y)$, причем фактор-группа изоморфна группе $\mathrm{Tor}[H(X), H(Y)]$. В работе намечен эскиз доказательства этой важной теоремы.

Во втором разделе изучается понтрягинское произведение. Пусть X — линейно связное односвязное пространство, x_0 — его точка; в этой точке будут расположены вершины всех рассматриваемых сингулярных кубов. Через E и Ω обозначаются пространства путей и петель в X, кончающихся в точке x_0. Проекция $p : E \to X$ ставит в соответствие каждому пути его начало. Для каждых двух путей $x \in E$, $y \in \Omega$ определено их произведение $xy \in E$, причем $p(xy) = p(x)$. Полагая $\gamma(x, y) = xy$, мы получаем непрерывное отображение $\gamma : E \times \Omega \to E$, индуцирующее отображение $\gamma : Q(E \times \Omega) \to Q(E)$. Отображение $\rho = \gamma \circ \mu$ группы $Q(E) \otimes Q(\Omega)$ в $Q(E)$ коммутирует с d и порождает отображение $\rho_* = \gamma_* \circ \mu_*$ групп гомологий. Для классов гомологий $z \in H(E)$, $w \in H(\Omega)$ пишут $\rho_*(r \otimes w) = z * w$. Операция $*$ и называется понтрягинским произведением. Группа $H(\Omega)$ становится после введения операции $*$ ассоциативной алгеброй $H_*(\Omega)$ с единицей, обозначаемой через e.

Авторы изучают спектральные свойства операции $*$ в расслоенном пространстве E с базой X и слоем Ω. В группе $\Gamma = C(E) \otimes C(\Omega)$ рассматривается дифференциал $d = d_E \otimes 1 + \omega \otimes d_\Omega$ и фильтрация $A^p(\Gamma) = A^p(E) \otimes C(\Omega)$. Отображение ρ сохраняет фильтрацию, т. е. отображает $A^p(\Gamma)$ в $A^p(E)$. Это дает возможность определить отображение спектральных последовательностей, т. е. отображение $\rho_r : E_r(\Gamma) \to E_r(E)$, коммутирующее с дифференциалом d_r. Далее, тождественное отображение группы $C(E) \otimes C(\Omega) = \Gamma$ на себя индуцирует канонический изоморфизм $\nu_0 : E_0(E) \otimes C(\Omega) \to E_0(\Gamma)$, для которого выполнено соотношение $d_0 \circ \nu_0 = \nu_0 \circ (d_0 \otimes 1 + \omega \otimes d)$. Это же тождественное отображение дает при $r \geqslant 1$ канонические отображения $\nu_r : E_r(E) \otimes H(\Omega) \to E_r(\Gamma)$, причем $\nu_r \circ (d_r \otimes 1) = d_r \circ \nu_r$. Переходя к понтрягинской операции $*$, т. е. рассматривая отображения $\rho_r \circ \nu_r$, получаем следующую теорему (областью коэффициентов является коммутативное кольцо с единицей).

Операция $*$, индуцированная отображением γ: $E \times \Omega \to E$, билинейна, ассоциативна и обладает единицей. Область значений операции $*$ определяется включениями: $E_0(E) * C(\Omega) \subset E_0(E)$; $E_r(E) * H(\Omega) \subset E_r(E)$, $r \geqslant 1$. При этом выполнены соотношения $d_0(x * v) = d_0 x * v + \omega x * dv$; $d_r(x * v) = d_r x * v$, $r \geqslant 1$. Кроме того, операция $*$ переходит в себя при естественном изоморфизме группы $H(E_r)$ на E_{r+1}.

При $r = 1,2$ дается следующее описание операции $*$. Пусть группа $C(X) \otimes H(\Omega)$ канонически отождествлена с E_1, а $H(X) \otimes H(\Omega)$ канонически отображена в $E_2 = H(X, H(\Omega))$. Тогда имеет место соотношение $(x \otimes u) * v = x \otimes (u * v)$, где $u, v \in H(\Omega)$, а x принадлежит группе цепей $C(X)$ при $r = 1$ и группе гомологий $H(X)$ при $r = 2$.

Далее дается краткое обсуждение случая когомологий, т. е. перевод на язык сингулярной теории ре-

зультатов Лере и Бореля (Leray J., C. r. Acad. sci., 1949, 228, 1784; Borel A., РЖМат, 1953, 127).

Авторы отмечают, что проведенная конструкция применима и в ряде других случаев, например для главных расслоенных пространств. Аналогичную конструкцию опубликовал Кудо (Kudo T. J., Osaka City Univ., 1952, 2, 101).

В третьем разделе даны применения найденных соотношений.

Теорема А. Пусть группа $H(X)$, построенная при помощи кольца главных идеалов R в качестве области коэффициентов, R-свободна и все ее элементы трансгрессивны. Обозначим через $H_+(X)$ подгруппу группы $H(X)$, состоящую из элементов положительной размерности. Тогда $H(\Omega)$ содержит подгруппу T, изоморфную образу подгруппы $H_+(X)$ при некотором отображении, понижающем размерность на единицу, а алгебра Понтрягина $H_*(\Omega)$ является свободной ассоциативной алгеброй, порожденной подгруппой T, с единицей e.

Теорема В. Если $X = S^{n_1} \cup \ldots \cup S^{n_k}$ есть букет сфер, то алгебра Понтрягина $H_*(\Omega)$, где Ω — пространство петель на X, является свободной ассоциативной алгеброй с k образующими размерностей $n_1 - 1, \ldots, \ldots, n_k - 1$.

Теорема С. Пусть $\hat{X}$ — надстройка над X. Тогда в спектральной последовательности пространства путей на $\hat{X}$ все элементы подгруппы $H_+(\hat{X})$ трансгрессивны. В. Г. Болтянский

3133. Некоторые новые алгебраические методы в топологии. Массси (Some new algebraic methods in topology. Massey W. S.), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 2, 111—123 (англ.)

Обзорная статья (без доказательств), посвященная изложению топологических применений спектральных последовательностей и точных пар. М. М. Постников

3134. Размерность компактных групп и их представления. Такахаси (Dimension of compact groups and their representations. Takahashi Shuichi), Tôhoku Math. J., 1953, 5, № 2, 178—184 (англ.)

Пусть G — бикомпактная группа, $\hat{G}$ — совокупность непрерывных конечномерных представлений группы G, $C[\hat{G}]$ — алгебра над полем комплексных чисел C, порожденная матричными элементами представлений из $\hat{G}$. Тогда топологическая размерность множества $\hat{G}$ в смысле покрытий равна степени трансцендентности алгебры $C[\hat{G}]$ над C. Если $\bar{G}$ — пространство, элементами которого являются классы сопряженных элементов бикомпактной группы G, G^* — характеры представлений из $\hat{G}$, $C[G^*]$ — алгебра, порожденная G^*, то топологическая размерность пространства $\bar{G}$ равна степени трансцендентности алгебры $C[G^*]$ над C.

Н. Я. Виленкин

См. также: 2989, 3020, 3096, 3393, 3400

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3135. Несколько теорем о мерах. Урбаник (Quelques théorèmes sur les mesures. Urbanik K.), Fundam. math., 1954, 41, № 1, 150—162 (франц.)

Пусть $\mathbf{M}$ — борелевское тело подмножеств основного множества E, содержащее пустое множество и E, и пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — определенные на $\mathbf{M}$ конечные неотрицательные вполне аддитивные функции (меры), неатомические и обращающиеся в нуль на одной и той же совокупности множеств. Под разложением множества E будем понимать его разложение на n занумерованных попарно не пересекающихся множеств, принадлежащих к $\mathbf{M}$. Разложение $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ называется совершенным, если $\mu_1(E_1) = \mu_2(E_2) = \ldots = \mu_n(E_n)$ и для всякого разложения $E = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$, у которого $\mu_1(X_1) = \mu_2(X_2) = \ldots = \mu_n(X_n)$, имеем $\mu_i(X_i) \leqslant \mu_i(E_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Совершенные разложения, отличающиеся друг от друга лишь на множестве меры нуль, объединяются в один класс. Оказывается, что либо существует единственный такой класс, либо множество таких классов имеет по крайней мере мощность континуума. Если меры $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ пропорциональны, то существует такое разложение $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$, что

$$\mu_i(E_i) = \mu_i(E)/n \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и всякое разложение, удовлетворяющее этому условию, будет совершенным. Если же меры $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ непропорциональны, то существует совершенное разложение $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$, для которого

$$\mu_i(E_i) > \mu_i(E)/n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В. А. Рохлин

3136. Расщепление меры и измеримость относительно усредненной меры. Мак-Минн (Measure splitting and average measurability. McMinn Trevor J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 420—429 (англ.)

Функция φ, определенная на совокупности всех подмножеств фиксированного множества S, называется измеряющей S, если $0 \leqslant \varphi(\beta) \leqslant \infty$ $(\beta \subset S)$ и для всякой конечной или счетной системы H подмножеств множества S и всякого множества $A \subset \bigcup \alpha . (\alpha \in H)$ имеем $\varphi(A) \leqslant \Sigma \varphi(\alpha)$ $(\alpha \in H)$. Множество $\bigcup \alpha (\alpha \in H)$ обозначается через σH, мощность системы H — через $N(H)$. Множество $A \subset S$ называется φ-измеримым, если для всякого множества $T \subset S$ имеем $\varphi(T) = \varphi(TA) + \varphi(T \setminus TA)$. Совокупность всех φ-измеримых множеств обозначается через $\mathrm{mbl}\,\varphi$. Для $A \subset S$ вводятся:

$$\mathrm{im}\,\varphi(A) = \sup \varphi(\alpha) \quad (\alpha \in \mathrm{mbl}\,\varphi, \ \alpha \subset A),$$

$$\mathrm{om}\,\varphi(A) = \inf \varphi(\alpha) \quad (\alpha \in \mathrm{mbl}\,\varphi, \ \alpha \supset A),$$

$$\mathrm{av}\,\varphi(A) = \tfrac{1}{2}\{\mathrm{im}\,\varphi(A) + \mathrm{om}\,\varphi(A)\}.$$

Известно, что $\mathrm{om}\,\varphi$ и $\mathrm{av}\,\varphi$ измеряют S и что $\mathrm{mbl}\,\mathrm{om}\,\varphi \subset \mathrm{mbl}\,\mathrm{av}\,\varphi$. Главной целью работы является изучение условий, при которых

$$\mathrm{mbl}\,\mathrm{av}\,\varphi \subset \mathrm{mbl}\,\mathrm{om}\,\varphi. \qquad (1)$$

Пусть F — конечная или счетная непустая система попарно непересекающихся множеств и n — неотрицательное целое число. Будем говорить, что $Fn\varphi$ есть расщепление, если $\sigma F \subset \mathrm{mbl}\,\varphi$, $\varphi(\beta) > 0$ при $\beta \in F$ и для всякой системы $G \subset F$ с $N(G) \leqslant n$ имеем $\mathrm{im}\,\varphi(\sigma G) = 0$. В этих терминах дается следующее необходимое условие справедливости соотношения (1): если (1) имеет место, то для всякой системы F такой,

что $N(F)=2$, $\varphi(\sigma F)<\infty$ и $F1\varphi$ есть расщепление, существует такая система G, что $N(G)=3$, $\sigma G=\sigma F$ и $G2\varphi$ есть расщепление.

Пусть F и G — системы подмножеств множества S, причем система G конечна или счетна. По определению, $G\varphi$ накрывает F, если $\sigma F\subset\sigma G$ и для всяких четырех множеств $A\in F$, $B\in F$, $\alpha\in G$, $\beta\in G$, у которых $\operatorname{om}\varphi(A\alpha)<\infty$ и $\operatorname{om}\varphi(B\beta)<\infty$, имеем $\operatorname{im}\varphi(A\alpha\cup B\beta)=0$. В этих терминах дается следующее достаточное условие справедливости соотношения (1): если для всякой системы F такой, что $N(F)=2$, $\varphi(\sigma F)<\infty$ и $F1\varphi$ есть расщепление, существует такая система G, что $G\varphi$ накрывает F, то (1) имеет место. В частности, если S есть полное сепарабельное метрическое пространство, $\varphi(A\cup B)=\varphi(A)+\varphi(B)$ для любых двух множеств A, B, находящихся на положительном расстоянии друг от друга, и для всякого множества $A\subset S$ существует такое борелевское множество $B\supset A$, что $\varphi(B)=\varphi(A)$, то $\operatorname{mbl}\operatorname{av}\varphi\subset\operatorname{mbl}\varphi$ (здесь $\operatorname{om}\varphi=\varphi$).

На примере функции $\operatorname{av}\varphi$ подчеркивается глубокое различие между принятым в работе определением измеримости по Каратеодори и определением, в силу которого множество $A\subset S$ считается φ-измеримым, если $\varphi(A)+\varphi(S\setminus A)=\varphi(S)$. В соответствии с этим последним определением относительно функции $\operatorname{av}\varphi$ были бы измеримы все множества.

Работа содержит также следующую теорему: Если $Fn\varphi$ есть расщепление и $\varphi(\sigma F)<\infty$, то для всякого k, удовлетворяющего неравенствам $n<k\leqslant N(F)$, существует такая система F', что $N(F')=k$, $\sigma F'=\sigma F$ и $F'n\varphi$ есть расщепление. В. А. Рохлин

3137. О мере суммы множеств. I. Теоремы Брунна, Минковского и Люстерника. Хенсток, Макбит (On the measure of sumsets. (I) The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik. Henstock R., Macbeath A. M.), Proc. London Math. Soc., 1953, **3**, № 10, 182—194 (англ.)

Пусть $A+B$ означает векторную сумму множеств A и B евклидова n-мерного пространства, $J_n(A)$ ($J_n^0(A)$) — n-мерную меру (внутреннюю меру) A. Для выпуклых n-мерных тел имеет место неравенство (выведенное Брунном):

$$\sqrt[n]{J_n(A+B)}\geqslant\sqrt[n]{J_n(A)}+\sqrt[n]{J_n(B)};\qquad(1)$$

при этом, как показал Минковский, равенство в (1) наступает лишь если тела A и B гомотетичны. В заметке референта (Докл. АН СССР, 1935, **3**, 55—58) указано, что свойство выпуклости A и B в этих предложениях несущественно: неравенство (1) имеет место в случае, если A и B (и $A+B$) — произвольные измеримые множества; указано также, что при $J_n(A)>0$ равенство в (1) имеет место лишь в случае Минковского (когда A и B — гомотетические выпуклые тела).

Авторы реферируемой статьи, отмечая правильность утверждений этой заметки, указывают, что приведенная в ней схема доказательства предполагает измеримость сечений множеств A и B гиперплоскостями, что имеет место не всегда; далее опровергаются неравенства (9) заметки, использованные в ней для выделения случая Минковского вырождения неравенства (1) в равенство.

Авторы приводят другое доказательство неравенства (1). Оно основано на аппроксимации произвольных множеств изнутри множествами F_σ, для которых и проводится доказательство, и на некоторых неравенствах интегрального характера для функций действительного переменного, формулированных в виде лемм 1—5 работы. Эти леммы устанавливают связь между мерами соответственных сечений A, B и $A+B$ гиперплоскостями и позволяют провести индукцию по числу измерений. При этом для случая, когда $J_n^0(A)>0$, удается усилить неравенство (1); именно доказывается неравенство

$$\sqrt[n]{J_n^0(A+B)}\geqslant\sqrt[n]{J_n^0(A)}+\sqrt[n]{J_n(B)}.$$

Эти же леммы позволяют выделить случай равенства в следующей уточненной формулировке: при $J_n^0(A)>0$ равенство в (1) имеет место лишь если A и B — гомотетические выпуклые тела или получаются из них выкидыванием множеств меры 0.

Примечание референта. Из того, что неравенство (1) справедливо для замкнутых множеств, сразу следует его справедливость для произвольных множеств (с заменой J_n на J_n^0). Л. А. Люстерник

3138. Теорема Данжуа и множества дробной размерности. Равец (The Denjoy theorem and sets of fractional dimension. Ravetz J.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, part 1, № 113, 88—96 (англ.)

Пусть E — некоторое линейное множество. Обозначим через $J(E,\delta)$ множество таких интервалов l длины $\leqslant\delta$, сумма которых покрывает E. Внешняя p-мера, $p>0$, множества E определяется по формуле

$$|E|_p=\lim_{\delta\to0}\inf_{J(E,\delta)}\sum l^p.$$

Размерность $\dim E$ определяется как точная нижняя грань чисел p, для которых $|E|_p=0$.

Известно, что для любой функции $f(x)$ $E_x[+\infty>D^+f(x)\geqslant D_+f(x)\geqslant-\infty]$ есть множество меры нуль в смысле Лебега. Ряд аналогичных соотношений между четырьмя производными числами Дини от непрерывных функций был установлен Данжуа (Denjoy A., J. math. pures et appl., 1915, **1**, 105—240; см. также Сакс С., Теория интеграла, М., 1949, 389).

В реферируемой статье рассматриваются множества дробной размерности и с их помощью доказаны следующие теоремы:

1. Для $p<1$ существует такая непрерывная функция $f(x)$, что множества

$$E_1[D_+f(x)=D_-f(x)=D^-f(x)=0],$$
$$E_2[D^+f(x)=+\infty]$$

имеют положительную внешнюю p-меру.

2. Существует такая непрерывная функция $f(x)$, что множества E_1 и E_2 (либо $E_3[1\geqslant D^+f(x)\geqslant1/2]$) будут размерности 1. А. Г. Джваршейшвили

3139. Двумерные метрические и качественные свойства действительных функций двух действительных переменных. Маркус (Proprietăţi metrice şi proprietăţi calitative ale funcţiilor reale de două variabile. Marcus S.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române. Sec. mat. şi fiz., 1953, **5**, № 4, 527—544 (рум.; резюме русс., франц.)

Автор называет двумерным асимптотическим (соответственно качественным) пределом функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) асимптотический (соответственно качественный) предел присоединенной функции

$$\varphi(x,y)=f(x,y_0)-f(x,y)+f(x_0,y)$$

в этой точке и подробно анализирует аналогии между двумерными метрическими и двумерными качественными свойствами функций. П. И. Романовский

3140. Об интегралах. Порчелли (Concerning integrals. Porcelli Pasquale), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 3, 395—400 (англ.)

Пусть на сегменте $[a, b]$ заданы функции $f(x)$ и $g(x)$. Рассматривается интеграл $\int_a^b f dg$ как предел

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} [f(x_k) + f(x_{k-1})] [g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

при $\max |x_k - x_{k-1}| \to 0$, где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Интегралы такого рода рассматривались ранее (Smith H. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1925, **27**, 491—495; РЖМат, 1955, 1700).

Обозначим через $|E|_g$ внешнюю меру множества $E \subseteq [a, b]$ относительно функции $g(x)$, которая предполагается неубывающей.

Доказывается предложение: Если равностепенно ограниченная последовательность кусочно-постоянных функций $\{f_n(x)\}$ сходится к нулю, кроме, быть может, множества S с $|S|_g = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dg(x) = 0.$$

Эта теорема дает возможность расширить класс функций на $[a, b]$, интегрируемых относительно функции $g(x)$. А. Г. Джваршейшвили

3141. Ортогональные функции, производные которых также ортогональны. Льюис (Orthogonal functions whose derivatives are also orthogonal. Lewis D. C.), Rend, Circolo mat. Palermo. 1953, **2**, № 2, 159—168 (англ.)

Рассматриваются такие ортогональные относительно веса $w(x)$ системы функций $y_i(x)$, что системы

$$\{q(x)[p(x)y_i(x)]'\} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

называемые автором «производными», ортогональны относительно веса $\nu(x)$, причем предполагается, что вес w положителен и непрерывен на интервале ортогональности (a, b); вес ν имеет непрерывную первую производную на (a, b); функции p, q и y_i на нем имеют непрерывные первые две производные; на концах интервала (a, b) все рассматриваемые функции таковы, что интегралы $\int_a^b y_i y_j w\, dx$ и $\int_a^b q^2 (py_i)' (py_j)' \nu\, dx$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ существуют.

При этих предположениях доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Функции y_i удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(\varphi y_i')' + (Q + \lambda_i w) y_i = f_i, \tag{1}$$

где

$$\varphi = p^2 q^2 \nu, \quad Q = p(p' q^2 \nu)', \quad E = pp' q^2 \nu, \tag{2}$$

λ_i — неотрицательные постоянные, f_i — непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\int_a^b f_i y_j\, dx = (\varphi y_j y_i' + E y_j y_i)\Big|_a^b \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Теорема 2. Если y_i образуют полную ортогональную относительно веса w систему и удовлетворяют граничным условиям, обращающим правую часть (3) в нуль, то y_i удовлетворяют дифференциальному уравнению (1) с $f_i = 0$.

Теорема 3. Если на интервале (a, b) данная функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную первую производную, а данная функция $Q(x)$ непрерывна, то для решения относительно p, q и ν первых двух уравнений (2) необходимо и достаточно взять

$$p = u^{-1}, \quad q^2 \nu = \varphi u^2, \tag{4}$$

где u — решение «укороченного» дифференциального уравнения

$$(\varphi u')' + Qu = 0. \tag{5}$$

Теорема 4а. Если на интервале (a, b) функции $Q(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 3, то функции y_i, удовлетворяющие соотношениям (1), (3), где λ_i — неотрицательные постоянные и $\lambda_j \neq \lambda_i$, если $i \neq j$, а E — такая функция, что равенство (3) имеет смысл, образуют систему, ортогональную на (a, b) относительно веса $w(x)$.

Теорема 4б. Если в дополнение к предположениям теоремы 4а предположить, что уравнение (5) имеет решение $u(x)$, не обращающееся в нуль на (a, b), то функции $q(py_i)'$ образуют систему, ортогональную относительно веса $\nu(x)$, где p, q, ν удовлетворяют соотношениям (4) и указанным выше дифференциальным ограничениям.

В качестве приложения теорем отыскиваются для функций Штурма — Лиувилля все «производные» системы, ортогональные относительно какого-либо веса.

В частности, если интервал ортогональности $(0, \pi)$, то для системы $\{\cos nx\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ единственной ортогональной «производной» системой является $\{\sin nx\}$. Для системы же $\{\sin nx\}$ «производные» системы $\{[u_s^{-1}(x) \sin nx]'\}$, где $u_s(x)$ — какое-либо решение уравнения $u_s'' - su_s = 0$ (s — постоянная $\geqslant -1$), не обращающееся в нуль на $(0, \pi)$, ортогональны относительно веса $u_s^2(x)$.

Примечание референта. Отыскание ортогональных систем, некоторые «производные» системы которых также ортогональны, легко можно свести к задаче отыскания ортогональных систем функций $\varphi_n(x)$, производные которых также ортогональны. Последняя задача при предположении замкнутости системы $\{\varphi_n(x)\}$ была решена Н. Г. Чеботаревым (Успехи матем. наук, 1948, **2**, № 4 (26), 46—48) и при предположении замкнутости системы $\{\varphi_n'(x)\}$ — С. Н. Андриановым (Уч. зап. Казанск. ун-та, 1950, **110**, № 7, 23—30) и референтом (Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, **10**, 197—206). Метод доказательства теоремы 1 близок методу С. Н. Андрианова доказательства соответствующей теоремы. Теорема 2 легко получается из теоремы Н. Г. Чеботарева.

Без предположения замкнутости системы самих функций или «производной» системы теорема 1 носит чисто формальный характер, так как не позволяет найти функции y_i. Б. М. Гагаев

3142. Теоремы об аппроксимации поверхностей. Чезари (Teoremi di approssimazione per superficie. Cesari Lamberto), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, **4**, № 4—5, 255—287 (итал.)

Рассматривается ряд результатов, ранее полученных автором, а также новая теорема об аппроксимации полиэдрами параметрически заданных поверхностей в евклидовом пространстве.

Пусть A — единичный квадрат евклидовой плоскости E_2 и E_{21}, E_{22}, E_{23} — координатные плоскости евклидова пространства E_3. Обозначим через (T, A) непрерывное отображение A в E_3: $p = T(w)$ $(w \in A$, $p \in E_3)$. Отображение (T, A) определяет непрерывную поверхность S, для которой (T, A) является параметрическим представлением: $x = x(w)$, $y = y(w)$, $z = z(w)$. Одновременно можно рассматривать проекции этого отображения (T_r, A) на координатные плоскости E_{2r} $(r = 1, 2, 3)$. Поверхность S называется полиэдрической, если существует непрерывное отображение $S = (T, A)$ линейное во всех треугольниках подходящей триангуляции A. Площадь полиэдрической поверхности обозначаем $a(S)$, для любой поверхности лебегова площадь обозначается $L(S) = L(A, T)$. Для пары отображений (T, A) и (T', A) определяется функция $d = d(T, T', A) =$

$= \max |T(w) - T'(w)|$ для всех $w \in A$, где $|p - p'|$ означает расстояние между соответствующими точками.

Для каждого простого замкнутого полигона $q \subset A$ с границей q^* и отображений T, T_r определяются функции $u = u(q, T)$ и $u_r = u(q, T_r)$ равенствами:

$$u_r = \int_{E_{2r}} O(p; C_r)\, d\sigma, \quad u(q, T) = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2},$$

где C_r означает (T_r, q^*), а $O(p; C_r)$ — топологический индекс точки p относительно кривой C_r (порядок точки относительно отображения). Интеграл берется в смысле Лебега и суммируемость обеспечивается предположением $L(A, T) < +\infty$. Если D — конечная система замкнутых простых полигонов, то

$$U(A, T_r) = \sup_D \sum_{q \in D} |u(q, T_r)| \quad (r = 1, 2, 3)$$

и

$$U(A, T) = \sup_D \sum_{q \in D} u(q, T).$$

Как было ранее показано автором, $U(A, T) = L(A, T)$. Под правильной полигональной областью понимается область $R = r_0 - (r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu)$, где $r_0, r_1, \ldots, r_\nu$ $(0 \leqslant \nu < \infty)$ — простые замкнутые полигоны, $(r_0)^0 \supset r_i$, $\bar{r}_i \bar{r}_j = 0$ $(i, j = 1, \ldots, \nu)$ (как обычно, E^0 означает множество внутренних точек E, а $\bar{E}$ — его замыкание). Если D означает некоторое разбиение A на правильные полигональные области, то в равенстве $D = D_0 + D_1 + \ldots + D_j$ под D_0 понимается система всех «охватывающих» полигонов r_0 для всех правильных полигональных областей, под D_1 — аналогичная система полигонов r_1 и т. д.

Основным результатом работы является новая теорема об аппроксимации:

Теорема. Пусть $S = (T, A)$ — непрерывное отображение и $S_n = (T_n, A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность полиэдрических отображений единичного квадрата A в E_3 с $d_n = d(T_n, T, A) \to 0$. Пусть далее C, C_3, C_{n3} — образцы границы A^* квадрата A при отображениях T, T_3, T_{n3}. Предположим, что $a(S_n) < M$ и $l(C_{n3})$, $l(C_3) \leqslant M$, где l означает длину кривой и M фиксировано. Для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность индексов $\{n_i\}$ и для каждого $n \in \{n_i\}$ разбиение $D = D_0 + D_1 + \cdots + D_\nu$ квадрата A на правильные полигональные области такие, что если $\Sigma^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots, \nu)$ означает сумму, распространенную на полигоны $q \in D_j$, а Σ_j — сумму по индексам $j = 1, 2, \ldots, N$, то: 1) $\operatorname{diam} T(q) < \varepsilon$ для любого $q \in D_0$, $\operatorname{diam} T(\Sigma^{(j)} q) < \varepsilon$ для каждого $j = 1, 2, \ldots, \nu$; 2) $\operatorname{mes} M_3 < \varepsilon$, где $M_3 = T_3(\Sigma^{(0)} q^*) \subset E_{23}$; 3) $U(A, T_3) - \Sigma^{(0)} |u(q, T_3)| < \varepsilon$, $\Sigma_j \Sigma^{(j)} |u(q, T_3)| < \varepsilon$;

4) $\Sigma^{(0)} |u(q, T_{n3}) - u(q, T_3)| < \varepsilon$ для всех $n \in \{n_i\}$;

5) $\Sigma_j |\Sigma^{(j)} u(q, T_{n3})| < \varepsilon$ для всех $n \in \{n_i\}$; 6) полигоны $q \in D_0$ и число ν те же самые для всех $n \in \{n_i\}$.

Аналогичные результаты справедливы при замене $r = 3$ на $r = 1$ или $r = 2$. Для выполнения условий $l(C_{n3})$, $l(C_3) \leqslant M$ достаточно, чтобы $l(C_n)$, $l(C) \leqslant M$, что заведомо выполняется, если, например, $l(C_n) = l(C) = 0$, т. е. поверхность замкнута.

Теоремы такого рода находят широкое применение в вариационном исчислении (см., например, РЖМат, 1954, 4059). Р. С. Гутер

3143 К. О дифференцировании и его обращении. Данжуа (Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse. Denjoy Arnaud, VIII p., la suite paginée 105—226, Paris, Gauthier-Villars, 1954, 2700 fr.), Bibliogr. France, 1954, 143, № 31—32, 726 (библ.).

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

3144. Об умножении порядковых типов. Слупецкий (Sur la multiplication des types ordinaux Słupecki J.), Colloq. math., 1954, 3, № 1, 41—43 (франц.)

Пусть $\alpha \neq 0$ — произвольно взятый порядковый тип. Тогда существуют для нижеследующих равенств такие соответствующие им порядковые типы $\alpha' \neq \alpha$, $\alpha'' \neq \alpha$, $\beta \neq 0$, что:

1) $\beta \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha'$;

2) $\alpha \cdot \beta = \alpha' \cdot \beta$;

3) $\eta \cdot \alpha = \eta \cdot \alpha'$ (η — порядковый тип множества всех рациональных чисел, упорядоченных по возрастанию);

4) $\alpha \cdot (\omega^* + \omega) = \alpha' \cdot (\omega^* + \omega)$;

5) $(\omega^* + \omega) \cdot \eta \cdot \alpha = (\omega^* + \omega) \cdot \eta \cdot \alpha'$ и $\alpha \cdot (\omega^* + \omega) \cdot \eta = \alpha'' \cdot (\omega^* + \omega) \cdot \eta$.

В конце статьи формулируется задача В. Серпинского: существуют ли порядковые типы α, β, γ, δ, μ и ν такие, что $\alpha \neq \beta$, $\alpha = \beta \cdot \gamma = \delta \cdot \beta$, $\beta = \alpha \cdot \mu = \nu \cdot \alpha$? Б. С. Содномов

3145. Об одной теореме, эквивалентной существованию множества действительных чисел мощности $\aleph_1$. Серпинский В., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, 2, № 2, 49—50

Без помощи аксиомы выбора доказывается эквивалентность двух предложений:

1. Существует функция, ставящая в соответствие всякому счетному множеству действительных чисел D действительное число $f(D) \notin D$.

2. Существует множество действительных чисел мощности $\aleph_1$. В. А. Успенский

3146. Об одном свойстве иррегулярных кардинальных чисел. Фодор, Кечкеметь (Über eine Eigenschaft der singulären Kardinalzahlen. Fodor G., Ketskeméty I.), Colloq. math., 1954, 3, № 1, 39—40 (нем.)

Дается прямое доказательство известного свойства (Jourdain E., Quart. J. Math., 1908, 39, 375—384) иррегулярных кардинальных чисел: если $\aleph_\alpha$ есть некоторое иррегулярное кардинальное число и ω_β — наименьшее начальное порядковое число, конфинальное числу ω_α, то $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} > \aleph_\alpha$. Б. С. Содномов

3147. Доказательство вполне упорядоченности кардинальных чисел. Хёниг (Proof of the well-ordering of cardinal numbers. Hönig Chaim Samuel), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 312 (англ.)

Дается простое доказательство известного факта, что в множестве E' мощностей подмножеств множества E имеется наименьший элемент (отсюда следует, что множество E' вполне упорядочено). При доказательстве используются теорема Цорна (Лефшец С., Алгебраическая топология, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1949, 16) и аксиома выбора. А. Д. Тайманов

3148. Относительно двух проблем Курепа. Шепердсон (On two problems of Kurepa. Shepherdson J. C.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 2, 301—304 (англ.)

Частично упорядоченное множество называется: 1) цепью, если любые два его элемента сравнимы; 2) антицепью, если любые два его элемента несравнимы; 3) разветвленно частично упорядоченным, если для любого его элемента x множество всех элементов, предшествующих x, образует цепь.

Теорема 1. Существует счетное разветвленно частично упорядоченное множество, в котором не существует цепи, пересекающей все максимальные антицепи, и не существует антицепи, пересекающей все максимальные цепи.

Отмечается, что эта теорема отвечает на два вопроса, поставленные Курепа (Kurepa G., Pacif. J. Math., 1952, 2, 323—326), и что ответы на эти вопросы были независимо получены Гастином (Gustin W., Math. Revs, 1953, 14, № 3, 255). Указывается, что из теоремы 1 с помощью аксиомы выбора выводится

Теорема 2. Каждое из следующих условий является достаточным для того, чтобы непустое множество S было конечным: 1) для всякого разветвленного частичного упорядочения S существует цепь, пересекающая все максимальные антицепи; 2) для всякого разветвленного частичного упорядочения S существует антицепь, пересекающая все максимальные цепи.

Отмечается, что в силу результата Курепа оба эти условия являются также и необходимыми.

В. А. Успенский

3149. О проблеме Серпинского о конгруэнтных множествах точек. Мыцельский И., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, 2, № 3, 123—124

Серпинский поставил вопрос, существует ли точечное множество, конгруэнтное всякому подмножеству, получаемому удалением из него одной точки; он же дал пример такого множества в гильбертовом пространстве (Sierpiński W., Fundam. math., 1950, 37, 1—4).

В реферируемой заметке формулируются теоремы, решающие вопрос для трехмерного пространства.

Теорема 1. Существует на сфере счетное множество E такое, что $E \setminus F \simeq E$ для всякого конечного множества F.

Теорема 2. Существует на сфере континуальное множество E такое, что $E \setminus D \simeq E$ для всякого не более чем счетного множества D.

Знак $\simeq$ означает здесь конгруэнцию посредством вращения (без отражения). Указывается, что теорема 1 доказывается эффективно, а теорема 2 — неэффективно. Отмечается, что вопрос о существовании множества такого рода на плоскости остается открытым.

В. А. Успенский

3150. О разбиениях сферы. Адамс (On decompositions of the sphere. Adams J. F.), J. London Math. Soc., 1954, 29, part 1, № 113, 96—99 (англ.)

Ф. Хаусдорфом доказана возможность разбиения поверхности S сферы трехмерного пространства на 4 попарно не пересекающихся множества $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, из которых A_1 счетно, а множества A_2, A_3, A_4 попарно конгруэнтны и в то же время A_4 конгруэнтно сумме $A_2 \cup A_3$. При этом движениями, совмещающими эти конгруэнтные множества, являются вращения пространства вокруг центра сферы (Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М.—Л., 1950, 277—283). Этот результат был усилен Робинсоном (Robinson R. M., Fundam. math., 1947, 34, 246—260).

Автор доказывает возможность разбиения n-мерной сферы на попарно не пересекающиеся части $A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, чтобы множества A_i были попарно конгруэнтны и в то же время были конгруэнты между собою любые две суммы вида: $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_r}, 0 < r < n$, т. е. $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_r} \simeq A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \ldots \cup A_{j_s}$, $0 < r < n$, $0 < s < n$.

При этом движениями, совмещающими эти конгруэнтные множества, являются ортогональные преобразования сферы, иными словами, кроме вращения вокруг центра сферы, допускаются и зеркальные отражения сферы. А. Д. Тайманов

3151 К. Теория абстрактных множеств. Френкел (Abstract set theory. Fraenkel Abraham A., XII+479 p., Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1953, 38.00 florins) (англ.)

Излагаются теория абстрактных множеств и некоторые вопросы линейных точечных множеств. Обращается внимание на основания теории: в книге сформулированы некоторые принципы теории множеств и в отдельных местах указано, как на них можно основать определения и доказательства. В других местах изложение ведется без явных ссылок на принципы. Продолжением этой книги будет книга автора по основаниям теории множеств, которая появится примерно в 1955 г.

Книга состоит из трех глав. В гл. I рассматриваются понятие множества, счетные множества и множества мощности континуум. В § 2 этой главы формулируются 5 принципов теории множеств: принцип равенства множеств, принцип существования множества-суммы и т. д. В гл. II изучаются эквивалентность множеств, сравнение кардинальных чисел, сложение, умножение и возведение в степень множеств и кардинальных чисел. В гл. III рассматриваются упорядоченные множества, их подобие, порядковые типы, вполне упорядоченные множества, порядковые числа и алефы. В § 9 гл. III рассматриваются множества типа η и λ, замкнутые и совершенные множества на прямой, канторово множество.

Все параграфы, кроме первого и последнего, заканчиваются упражнениями. В книге имеется обширная библиография (128 стр.). А. А. Конюшков

3152 К. Теория множеств. Инагаки (集合論. 稻垣武, 東海書房, 298 стр., Изд-во Токай-сёбо, Токио, 1953, 380 иен) (япон.)

Книга состоит из семи глав. В гл. 1 вводится понятие эквивалентности множеств и рассматриваются действия над множествами, включая нахождение произведения и степени. В гл. 2 изучаются кардинальные числа и для них доказывается теорема Кёнига. Подобие множеств, порядковые типы и порядковые числа рассмотрены в гл. 3—4; здесь же доказывается теорема Цермело о возможности вполне упорядочить любое множество. В гл. 5 дается общее определение произведения и степени упорядоченных множеств и порядковых типов, приводится теорема Цорна и доказывается ее эквивалентность теореме Цермело. Понятия о топологических, метрических и евклидовых пространствах даны в гл. 6; последний ее параграф посвящен понятию размерности в смысле Фреше. В гл. 7 рассматриваются B-множества, σs-операция и A-множества; в частности, для B-множеств доказываются критерий Суслина и критерий Лузина (о представлении с непересекающимися слагаемыми). А. А. Конюшков

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

3153. О поведении коэффициентов Фурье. Моханти, Нанда (On the behavior of Fourier coefficients. Mohanty R., Nanda M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 79—84 (англ.)

Пусть $f(t) \in L(-\pi, \pi)$, $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) - l$ и пусть $B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$, где a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции $f(t)$. Известно, что если $\psi(t) = o(1)$ при $t \to 0$, то $\{nB_n(x)\}$ суммируется (C, r) при $r > 1$ к l/π (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939, стр. 69, упр. 10).

Доказывается теорема:

Если $\psi(t) = o\{[\lg(1/t)]^{-1}\}$ при $t \to 0$ и $a_n, b_n = O(n^{-\delta})$, где $0 < \delta < 1$, то $\{nB_n(x)\}$ суммируется $(C, 1)$ к l/π. Отсюда, пользуясь одной тауберовой теоремой Харди—

Литлвуда, авторы получают признак сходимости Харди — Литлвуда для сопряженного ряда. Обозначения не вполне аккуратны, в ряде оценок потеряны константы. Ф. В. Широков

3154. Заметка к теореме Харди о тригонометрическом ряде. Хейвуд (A note on a theorem of Hardy on trigonometrical series. Heywood Philip), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 3, 373—378 (англ.)

Исследуются тригонометрические ряды с монотонно убывающими к нулю коэффициентами

$$\sum_1^\infty \lambda_n \sin n\theta = f(\theta).$$

Известно (Hardy G. H., J. London Math. Soc., 1928, **3**, 12—13; Proc. London Math. Soc., 1931, **32**, 441—448), что если $\lambda_n \sim An^{-\alpha}$ при $n \to \infty$, где $A > 0$ — фиксированная постоянная и $0 < \alpha \leqslant 1$, то при $\theta \to +0$

$$f(\theta) \sim A \cos \frac{1}{2}\alpha\pi\, \Gamma(1-\alpha)\, \theta^{\alpha-1}. \qquad (1)$$

Знак $\sim$ означает эквивалентность, причем при $\alpha = 1$ в правой части (1) следует брать предел при $\alpha \to 1$. Кроме этого, Харди показал, что эквивалентность (1) влечет $\lambda_n \sim An^{-\alpha}$.

В реферируемой работе доказывается более общая теорема:

Если последовательность $\{\lambda_n\}$ положительна и монотонно убывает к нулю, то условие $\lambda_n \sim An^{-\alpha}$ при $n \to \infty$ необходимо и достаточно для того, чтобы

$$f(\theta) \sim \pi A \theta^{\alpha-1} / [2\Gamma(\alpha) \sin \frac{1}{2}\alpha\pi] \quad \text{при } \theta \to +0,$$

где $0 < \alpha < 2$ и $A > 0$ — фиксированная постоянная. Известно, что это утверждение неверно при $\alpha \geqslant 2$. П. Л. Ульянов

3155. Суммирование и единственность двойных тригонометрических интегралов. Шапиро (Summability and uniqueness of double trigonometric integrals. Shapiro Victor L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 2, 322—339 (англ.)

Пусть φ есть некоторая аддитивная комплексная функция ограниченных B-измеримых множеств на плоскости. Тогда $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + i(\varphi_3 - \varphi_4)$, где φ_i $(i = 1, \ldots, 4)$ суть положительные аддитивные функции множеств. Обозначим через $W(\varphi, E) = \Sigma_1^4 \varphi_i(E)$ полную вариацию функции φ на множестве E.

Двойным тригонометрическим интегралом называется интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(xu+yv)}\, d\varphi(u, v). \qquad (1)$$

Интеграл (1) суммируем круговым методом (C, α) в точке (x, y) к функции $L(x, y)$, если при $R \to \infty$

$$2\alpha R^{-2\alpha} \int_0^R I_r(x, y)\,(R^2 - r^2)^{\alpha-1}\, r\, dr \to L(x, y),$$

где

$$I_r(x, y) = \iint_{C_r^{(0,\,0)}} e^{i(xu+yv)}\, d\varphi(u, v),$$

а $C_R^{(x,\,y)}$ есть круг радиуса R с центром в (x, y). Справедливо следующее:

Пусть

$$W(\varphi, C_1^{(-u,\,-v)}) = o[(u^2 + v^2)^{\alpha/2}], \quad \alpha > -1,$$

и $D^* \subset [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$ есть замкнутая область. Тогда существует такой двойной тригонометрический ряд $\Sigma_{-\infty}^{\infty}\Sigma_{-\infty}^{\infty} a_{m,n} e^{i(mx+ny)}$ с коэффициентами $a_{m,n} = o[(m^2 + n^2)^{\alpha/2}]$, что разность

$$\iint_{C_R^{(0,\,0)}} e^{i(xu+yv)} d\varphi(u, v) - \sum_{m^2+n^2 \leqslant R^{1/2}} a_{m,n}\, e^{i(mx+ny)}$$

равномерно относительно $(x, y) \in D^*$ суммируема методом (C, α) к нулю при $R \to \infty$.

Доказаны теоремы аналогичного характера, которые являются обобщением соответствующих теорем Зигмунда на случай двух переменных (Zygmund A., Ann. Math., 1947, **48**, № 2, 393—440). А. Г. Джваршейшвили

3156. Равномерная полнота семейства функций вида $(1 + k_p x)^{-1}$. Порчелли (Uniform completeness of sets of reciprocals of linear functions. Porcelli Pasquale), Duke Math. J., 1953, **20**, № 2, 185—193 (англ.)

Приводятся следующие три необходимых и достаточных условия полноты последовательности функций $K : \{(1 + k_p x)^{-1}\}$ $(0 \neq k_p > -1,\ k_p \neq k_q$ при $p \neq q)$ в пространстве непрерывных на $[0, 1]$ функций.

1. Расходимость ряда $\Sigma_0^\infty [1 - |x_p|]$, где $x_p = [(1 + k_p)^{1/2} - 1] / [(1 + k_p)^{1/2} + 1]$.

2. Для любой функции $\varphi(x)$ с ограниченной вариацией на $[0, 1]$ из равенств $\int_0^1 (1 + k_p x)^{-1}\, d\varphi(x) = 0$ $(p = 0, 1, \ldots)$ вытекает, что $\varphi(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$.

3. Принадлежность функции, тождественно равной единице, к замыканию линейного многообразия функций K.

Показывается, что если для последовательности K $|\arg(1 + k_p)| \leqslant \theta < \pi$, $|1 + k_p| \geqslant \delta$ $(p = 0, 1, \ldots)$, то расходимость ряда $\Sigma_0^\infty |k_p|^{-1/2}$ необходима и достаточна для полноты последовательности K в пространстве непрерывных на $[0, 1]$ функций. Выводится ряд следствий. С. Н. Мергелян

См. также: 2989, 3020, 3021, 3113, 3122

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3157. Изучение элементарных функций от $z = x + iy$ на различных линиях плоскости x, y. Булиган (Étude de fonctions élémentaires de $z = x + iy$ sur diverses lignes du plan x, y. Bouligand G.), Rev. math. spéc., 1954, **64**, № 9, 205—206 (франц.)

3158. Об обращении теоремы Люка. Чеймберлин, Вулф (Note on a converse of Lucas's theorem. Chamberlin E., Wolfe J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 2, 203—205 (англ.)

Выпуклое замыкание множества нулей многочлена $p(z)$ называется полигоном Люка для $p(z)$. Если π и π' — полигоны многочленов $p(z)$ и $p'(z)$, то по теореме Люка $\pi' \subset \pi$. Пусть $\pi(c)$ — полигон многочлена $p(z) + c$ и π_0 есть общая часть всех полигонов $\pi(c)$ при изменении c.

Сторона полигона $\pi(c)$, на которой расположены лишь два простых нуля многочлена $p(z) + c$, не имеет общих точек с границей множества π_0, если степень $p(z)$ больше двух. П. К. Суетин

3159. Степенные ряды и кривые Пеано. Шеффер (Power series and Peano curves. Schaeffer A. C.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 2, 383—389 (англ.)

Салем и Зигмунд (Salem R., Zygmund A., Duke Math. J., 1945, 12, 569—578) указали класс лакунарных рядов

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}, \qquad (1)$$

суммы $f(z)$ которых есть функции, регулярные в круге $|z|<1$, непрерывные в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и такие, что множество значений $f(e^{i\theta})$, $0\leqslant\theta<2\pi$, покрывает некоторый квадрат.

В реферируемой работе доказывается, что если ряд (1) удовлетворяет условиям

$$\sum_1^{\infty} |a_k| < \infty,\ a_1 \neq 0,\ |a_{k+1}/a_k| \geqslant \rho > 3/4,$$

$$n_{k+1}/n_k \geqslant \mu_k,$$

$$\mu_k < \mu_{k+1},\ k = 1, 2, 3, \ldots,\ \sum_1^{\infty} \mu_k^{-1/k} \leqslant 1/10,$$

то множество значений $f(e^{i\theta})$, $0\leqslant\theta<2\pi$, совпадает с множеством значений $f(z)$ в круге $|z|\leqslant 1$.

Существование функции $f(z)$, регулярной в круге $|z|<1$, непрерывной в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и такой, что множество значений $f(e^{i\theta})$ совпадает с множеством значений $f(z)$ в круге $|z|\leqslant 1$, было доказано ранее (Piranian G., Titus C. J., Young G. S., Michigan Math. J., 1952, 1, 69—72). Н. А. Давыдов

3160. О сверхсходимости одного ряда. Леонтьев А. Ф., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 3, 381—384

В более общей форме, чем это было известно, доказывается теорема для рядов Дирихле, являющаяся аналогом теоремы Островского о сверхсходимости ряда Тейлора.

Теорема. Пусть $f(z) = \Sigma_0^{\infty} a_n z^n$, $a_n \neq 0$, — целая функция порядка ρ и типа σ, причем $\lim n^{1/\rho}\sqrt[n]{|a_n|} > 0$; $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел с $\overline{\lim}\, n/|\lambda_n|^{\rho} = \tau < \infty$; число σ' определяется уравнением $(\sigma' e\rho)^{1/\rho} = \lim n^{1/\rho}\sqrt[n]{|a_n|}$; m — целое, $m > \rho$. Если последовательность агрегатов

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} f(\lambda_k z)\ (n = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится в круге $|z|<R$, $R > \left(\frac{2\pi\tau}{\sigma' \sin(\pi\rho/m)}\right)^{1/\rho}$ и если для бесконечной последовательности $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ $|\lambda_{n_k+1}/\lambda_{n_k}| \to \infty$ при $k \to \infty$, то во всей области D регулярности предельной функции $F(z)$

$$F(z) = \lim \sum_1^{n_k} \alpha_i f(\lambda_i z),\ \alpha_i = \lim_{n\to\infty} a_{n,i}.$$

Область D в силу этого однолистна и односвязна. А. О. Гельфонд

3161. Об области ограниченности последовательности полиномов Дирихле. Леонтьев А. Ф., Матем. сб., 1954, 35(77), № 1, 175—186

Следующая теорема является основным результатом работы: Пусть $\varphi(z) = \Sigma_0^{\infty} a_n z^n/n!$ — целая функция нулевой степени, т. е. не выше чем первого порядка и минимального типа, и $M[F] = \Sigma_0^{\infty} a_n F^{(n)}(z)/n!$ — оператор, порожденный этой функцией. Пусть $\{f_n(z)\}$ — последовательность целых функций, удовлетворяющих условию

$$M[f_n(z)] = 0, \qquad (1)$$

и G — множество точек, в некоторой окрестности каждой из которых последовательность $\{f_n(z)\}$ ограничена. Тогда каждая связная компонента множества G есть выпуклая область.

Для доказательства этой теоремы используется метод, развитый автором в прежних работах (Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, 13, 221—230; Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 39, 65—79).

Из этой теоремы далее получается, что если $\{f_n(z)\}$ — последовательность целых функций, удовлетворяющих условию (1), и G — множество всех точек, в некоторой окрестности каждой из которых последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится, то всякая связная компонента D_1 множества G есть выпуклая область. Кроме того, область регулярности определенной в D_1 предельной функции последовательности также выпукла. Последнее утверждение совпадает в существенном с теоремой Пойа (Polya G., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1927, 187—195).

Существенно, что в качестве функций $f_n(z)$ могут быть взяты полиномы Дирихле

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} e^{\lambda_j z}\ (n = 1, 2, \ldots).$$

В этом случае условие (1) может быть заменено условием: $\lim_{n\to\infty}(n/\lambda_n) = 0$. Б. Я. Левин

3162. Оценка постоянных в конформном отображении. Плотник, Бентон (Evaluation of constants in conformal representation. Plotnick Samuel I., Benton Thomas C.), Quart. Appl. Math., 1954, 12, № 1, 76—77 (англ.)

Тривиальное замечание о формуле Кристоффеля — Шварца, облеченное в неточную форму. А. В. Батырев

3163. Конформное отображение круговых многоугольников. I. Штальман (Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. I. Stallmann Friedemann), Math. Z., 1954, 60, № 2, 187—212 (нем.)

Круговым многоугольником (Kreisbogenpolygon) называется односвязная часть римановой поверхности, ограниченная конечным числом круговых дуг и, возможно, конечным числом логарифмических точек ветвления (если последние отсутствуют, то многоугольник называется обыкновенным); действительной рациональной функцией называется такая рациональная функция, которая на действительной оси принимает только действительные значения и не имеет полюсов вне этой оси.

Для обыкновенных круговых многоугольников еще Шварцем (Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1952, гл. III, § 2) доказаны теоремы:

1. Если функция $\eta(x)$ реализует конформное отображение верхней полуплоскости на круговой многоугольник, то производная Шварца $[\eta]_x = \eta'''/\eta' - {}^3/_2 \times (\eta''/\eta')^2$ есть действительная рациональная функция.

2. Всякое решение $\eta = \eta(x)$ дифференциального уравнения

$$[\eta]_x = R(x), \qquad (1$$

где $R(x)$ — действительная рациональная функция, реализует отображение верхней полуплоскости на круговой многоугольник.

В такой формулировке, как замечает автор, эти предложения справедливы и для круговых многоугольников в расширенном смысле.

Известно также, что решение нелинейного уравнения третьего порядка (1) сводится к решению уравнения второго порядка

$$y'' + q(x)\, y = 0; \qquad (2$$

именно отношение любых двух линейно независимых решений уравнения (2) является решением уравнения (1). Однако использование уравнения (2) для конформных отображений даже в простейшем случае, когда $q(x)$ имеет полюсы не выше второго порядка

(уравнение типа Фукса), затрудняется из-за отсутствия способа определения постоянных, характеризующих конформное отображение полуплоскости на круговой многоугольник.

Автор предлагает асимптотическую оценку решений дифференциального уравнения (2) для больших значений некоторого параметра, как это сделано в работе Лангера (Langer R. E., Trans. Amer. Math. Soc., 1935, 37, 397—416). Уравнение (2) записывается в форме

$$y''/y = r(x) + \rho^2\varphi(x), \qquad (2')$$

где $r(x)$ и $\varphi(x)$ — действительные рациональные функции, подчиненные некоторым условиям, производится преобразование Лиувилля

$$\xi(x) = \rho\int_{x_0}^{x}\sqrt{\varphi(x)}\,dx, \quad u(\xi) = \sqrt[4]{\varphi(x)}\,y(x),$$

после чего уравнение (2′) приводится к виду

$$u''/u = 1 + \left\{r(x) + \frac{1}{2}[\xi]_x\right\}/\rho^2\varphi(x) = 1 + \rho^{-2}Q(\xi). \quad (3)$$

При этом верхняя x-полуплоскость с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца $\xi(x)$ отображается на прямолинейный ξ-многоугольник, стороны которого параллельны осям координат. Доказывается, что $Q(\xi)$ имеет на границе ξ-многоугольника лишь конечное число особых точек, которые являются полюсами второго порядка; в точке же $\xi = \infty$ $Q(\xi)$ имеет нуль не ниже второго порядка. Далее рассматривается вспомогательное уравнение $v''/v = 1 + \rho^{-2}P(\xi)$ с уже известными решениями и предполагается, что разность $q(\xi) = Q(\xi) - P(\xi)$ в известном смысле мала. Уравнение (3), записанное в виде $u''/u = 1 + [P(\xi) + q(\xi)]\,\rho^{-2}$, оказывается эквивалентным интегральному уравнению

$$u(\xi) = v_1(\xi) + \int_{\xi_1}^{\xi}\frac{v_1(\zeta)\,v_2(\xi) - v_2(\zeta)\,v_1(\xi)}{\rho^2 W(v_1, v_2)}\cdot q(\zeta)\,u(\zeta)\,d\zeta,$$

где v_1, v_2 — любая пара линейно независимых решений вспомогательного уравнения. Интегральное уравнение решается методом последовательных приближений, причем исследуется поведение решения при $\rho \to \infty$.

Выводятся следствия из общей теории в применении к конформному отображению. Рассматривается для достаточно больших значений параметра ρ дифференциальное уравнение Ламе

$$y''/y = -\frac{3}{16}\sum_{\nu=1}^{3}(x - e_\nu)^{-2} + \frac{1}{4}[(5/4 + \delta^2)\,x +$$

$$+ \rho^2]\prod_{\nu=1}^{3}(x - e_\nu)^{-1},\ 0 \leqslant \delta^2 \leqslant 1/2,$$

которое приводится с помощью преобразования Лиувилля к виду

$$u''/u = 1 - \frac{1 - (2\delta)^2}{4}\wp(\xi; 2\rho K, 2i\rho K'), \qquad (4)$$

где $\wp(\xi; 2\rho K, 2i\rho K')$ — функция Вейерштрасса, и исследуется соответствующее конформное отображение ξ-четырехугольника на круговой четырехугольник, реализуемое функцией $\eta(\xi) = u_1(\xi)/u_2(\xi)$, где $u_1(\xi)$ и $u_2(\xi)$ — линейно независимые интегралы уравнения (4). И. Е. Базилевич

3164. О некоторых конформных отображениях. Миллендер (Over zekere conforme afbeeldingen. Mullender P.), Simon Stevin, 1954, **30**, № 1, 44—47 (голл.)

В предыдущей статье под таким же названием (Simon Stevin, 1949, **26**, 136—142) автор показал, что для функций $w(z) \equiv z - \sum_2^\infty p_n z^n$, где $p_2 \geqslant 0$, $p_3 \geqslant 0$,... и $\sum_2^\infty np_n = 1$, достаточным условием выполнения равенства

$$\lim_{\varphi\to 0}\arg[w(e^{i\varphi}) - w(1)] = 0 \qquad (1)$$

является сходимость ряда

$$\sum_1^\infty q_n < \infty, \text{ где } q_n = \sum_{\nu=1}^\infty \nu p_{n+\nu}\ (n = 1,2,\ldots). \qquad (2)$$

В реферируемой статье приводится пример функции, показывающий, что условие (2) не является необходимым для выполнения равенства (1). П. П. Белинский

3165. Об одном свойстве экстремальных областей задачи коэффициентов. Куфарев П. П., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 3, 391—393

Известно (Голузин Г. М., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, **27**), что функция $z = f(w)$, реализующая экстремум функционала

$$L(\varphi) = \mathrm{Re}\,\{\varphi\}_n,\ \{\varphi\}_n = \varphi^{(n)}(0)/n!,$$

в классе функций

$$\varphi(w) = w + c_2w^2 + \ldots + c_nw^n + \ldots,$$

голоморфных и однолистных в круге $|w| < 1$, отображает $|w| < 1$ на область B, получаемую из плоскости z проведением разрезов по конечному числу аналитических кривых без кратных конечных точек. Доказательство этого основывается на том, что $f(w)$ удовлетворяет определенному дифференциальному уравнению вида

$$(wf'_w/f)^2 = B(w)/A(f).$$

В реферируемой работе доказана более общая теорема:

Пусть $C_{z_0}(\tau)$ — произвольная дуга границы Γ экстремальной области B, соединяющая точки z_0 и $z(\tau)$, и $G_{z_0}(\tau)$ — область, получаемая из плоскости проведением разреза по $C_{z_0}(\tau)$. Функция $w = F(z, \tau)$, $F(0, \tau) = 0$, $F'(0, \tau) = e^\tau$, отображающая $G_{z_0}(\tau)$ на $|w| < 1$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(zf'_z/F)^2 = A(z)/B(F, \tau),$$

где

$$A(z) = \sum_1^{n-1}A_k/z^{-k},\ A_k = \{[f(w)]^{k+1}\}_n,$$

$$B(F, \tau) = \sum_1^{n-1}b_kF^{-k} + \sum_1^{n-1}\bar{b}_kF^k + \frac{1}{2}(b_0 - \bar{b}_0) -$$

$$- \frac{1}{2}(A_0 + \bar{A}_0) + \frac{w_0(F + w_0)}{2d(F - w_0)}A_1 - \frac{\bar{w}_0(1 + F\bar{w}_0)}{2\bar{d}(1 - F\bar{w}_0)}\bar{A}_1,$$

$$b_k = \{F(f(w), \tau)/F'(f(w), \tau)\}_k\ (b_{n-1} = e^{(n-1)\tau}),$$

$$w_0 = F(\infty, \tau),\ d = \lim z(F(z, \tau) - w_0) \text{ при } z \to \infty.$$

Отмечается также, что вариационная формула Г. М. Голузина (см. предыдущую ссылку, стр. 63) легко следует из уравнения (102) одной работы автора (Матем. сб., 1943, **13**(55), № 1, 111). И. Е. Базилевич

3166. О коэффициентах однолистных функций. Гуан Шэн (單葉函數的係數 o 闢昇), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, **4**, № 1, 87—103 (кит.; резюме русск.)

Пусть функция

$$f(z) = z + \sum_2^\infty c_nz^n \qquad (1)$$

регулярна и однолистна в круге $|z| < 1$. Доказывается оценка:

$$|c_n| < \frac{1}{2}\exp\left\{1 - \frac{1}{2}(2 - |c_2|)^2\right\}n + O(n^{1/7}), \qquad (2)$$

при $|c_2| < 2$ улучшающая неравенства, полученные И. Е. Базилевичем (Докл. АН СССР, 1949, **65**, № 3,

253—255) и И. М. Милиным (Матем. сб., 1951, 28(70), 359—400) (при $|c_2|=2$ эта оценка грубее упомянутых неравенств, в которых первое слагаемое правой части то же, а второе есть константа).

Пусть функция

$$f_k(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}c_{nk+1}^{(k)}z^{nk+1},\quad k=2,3,\ldots, \tag{3}$$

регулярна и однолистна в круге $|z|<1$.

Доказывается:

$$|c_n^{(2)}|<2^{-1/2}3^{1/2}\exp\left\{\frac{1}{2}-(1-|c_3^{(2)}|)^2\right\}+o(1). \tag{4}$$

Аналогичная оценка, улучшающая более ранний результат автора (РЖМат, 1955, 174), устанавливается для произведения $n^{1/2}|c_n^{(3)}|$.

Из этих оценок выводятся некоторые следствия.

В частности, при $c_2=0$ из оценки (2) имеем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sup_{f(z)\in S(0)}\frac{|c_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2e}$$

($S(0)$ есть класс однолистных в единичном круге функций вида (1) с $c_2=0$), а из оценки (4) при $c_3^{(2)}=0$ получаем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sup_{f_3(z)\in S_3(0)}|c_n^{(2)}|\leqslant 2^{-1/2}3^{1/2}e^{-1/2}=0{,}8834\ldots$$

($S_2(0)$ есть класс однолистных в единичном круге функций вида (3) с $k=2$ и $c_3^{(2)}=0$).

Отметим, что предельное неравенство, получаемое из оценки (2) при $|c_2|=2$, совпадает с соответствующим неравенством, полученным И. Е. Базилевичем и И. М. Милиным (см. предыдущие ссылки), а предельное неравенство, получаемое из оценки (4) при $|c_3^{(2)}|=1$, совпадает с соответствующим результатом референта (Матем. сб., 1951, 28(70), 401—406). Ю. Е. Аленицын

3167. О коэффициентах однолистных рядов Лорана. Нехари, Шварц (On the coefficients of univalent Laurent series. Nehari Zeev, Schwarz Binyamin), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 212—217 (англ.)

Пусть R — класс функций $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_nz^n$, регулярных и однолистных в кольце $\rho<|z|<1$, причем все коэффициенты a_n действительные.

Пусть S — класс функций $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_nz^n$, регулярных и однолистных в $\rho<|z|<1$, отображающих это кольцо на область, звездообразную относительно начала координат.

Теорема 1. Если $f(z)$ — функция класса R, то имеют место следующие оценки:

$$|a_n|\leqslant\frac{n}{1-\rho^{2n}}|a_1(1+\rho^{n+1})-a_{-1}(1+\rho^{n-1})|,$$

$$n=\pm2,\pm3,\ldots$$

Эти оценки точные при всех значениях n, и знак равенства достигается только для функции $f_0(z)=\wp(\ln z;\ i\pi,\ln\rho)$, имеющей разложение (с точностью до аддитивной постоянной):

$$f_0(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\rho^{2n}z^{-n}}{1-\rho^{2n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^n}{1-\rho^{2n}}.$$

При доказательстве однолистность не используется. Существенно используется лишь тот факт, что $\operatorname{Im}\{f(z)\}$ сохраняет знак, если z не пересекает действительную ось. Поэтому так же, как и в аналогичном случае для рядов Тейлора (Rogosinski W., Math. Z., 1932, 35, 93—121), данный результат сохраняет силу и для типично действительных рядов Лорана, т. е. таких рядов, суммы которых действительны тогда и только тогда, когда z действительно.

Теорема 2. Если $f(z)$ — функция класса S и, кроме того, свободный член $a_0=0$, то имеют место оценки коэффициентов:

$$|a_n|\leqslant[n/(1-\rho^{2n})]\,[\,|a_1|(1+\rho^{n+1})+|a_{-1}|(1+\rho^{n-1})],$$

$$n=\pm2,\pm3,\ldots$$

Если все коэффициенты при отрицательных степенях равны 0, то данные оценки переходят в хорошо известные точные оценки для рядов Тейлора, звездообразных в единичном круге: $|a_n|\leqslant n|a_1|$, $n=2,3,\ldots$ (Nevanlinna R., Overs. Finska-vetensk. soc. Förh., 1921, A53, 1—21).

За исключением этого вырожденного случая, вопрос о точности данных оценок остается открытым.

Г. Г. Шлионский

3168. К проблеме Грёнвалля. Дженкинс (On a problem of Gronwall. Jenkins James A.), Ann. Math., 1954, 59, № 3, 490—504 (англ.)

В одной из проблем Грёнвалля (Gronwall T. H., C. r. Acad. sci., 1916, 162, 316—318) ищется $\sup|f(z)|$, $|z|=r$, в семействе S регулярных и однолистных в круге $|z|<1$ функций $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ при условии $a_2=\text{const}$, $|a_2|\leqslant2$.

В работе Лебедева и Милина (Матем. сб., 1951, 28(70), 359—400) указана ошибка в неравенстве Грёнвалля при $|a_2|<1$ и дана неточная оценка $\sup|f(z)|$, $|z|=r$. Голузин (Матем. сб., 1951, 28(70), 351—358) исследовал асимптотическое поведение $\sup_{|z|=r}|f(z)|$ при $r\to1$.

В реферируемой статье доказывается, что экстремальная функция поставленной задачи $w=f(z;r,\theta)=z+a_2(r,\theta)z^2+\ldots$, где $a_2(r,\theta)=|a_2|<2$ и θ зависит от $r=|z|$, реализует отображение круга $|z|<1$ на область $D(r,\theta)$, симметричную относительно действительной оси и сконструированную следующим образом.

С помощью функции

$$\zeta=\int\frac{(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})}{[z^3(z-r)(z-r^{-1})]^{1/2}}\,dz,$$

где $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ и корень имеет положительное значение для $0<z<r$, верхний единичный полукруг отображается на область K^* в плоскости ζ, ограниченную полубесконечным горизонтальным отрезком AB, на котором $\operatorname{Re}\zeta$ возрастает (точка A лежит в ∞), вертикальным отрезком BC, на котором $\operatorname{Im}\zeta$ возрастает, горизонтальным отрезком CD, на котором $\operatorname{Re}\zeta$ убывает, горизонтальным отрезком DE (коллинеарным CD), на котором $\operatorname{Re}\zeta$ возрастает, и вертикальным полубесконечным отрезком EA, на котором $\operatorname{Im}\zeta$ возрастает при обходе области в положительном направлении. При этом возможны три случая: 1) точка C лежит правее точки E, 2) точки C и E совпадают и 3) точка C лежит левее точки E. Далее область K^* расширяется за счет присоединения к ней отрезка DE (1 и 2 случаи) или DC (3 случай), и полученная область K конформно отображается на верхнюю полуплоскость w так, что точка A переходит в точку $w=0$, точка B в $w=b>0$ и точка E (1 и 2 случаи) или C (3 случай) в $w=\infty$.

В результате суперпозиции отображений верхний единичный полукруг в плоскости z отображается на верхнюю полуплоскость w с разрезом по некоторой аналитической дуге, являющейся образом присоединенного к области K^* отрезка DE или DC. По принципу симметрии это отображение аналитически продолжается через диаметр $-1<z<1$ и соответствующий ему отрезок $-a<w<\infty$ (1 случай), $-\infty<w<\infty$ (2 случай), $-\infty<w<a$ (3 случай). Если функция, реали-

зующая построенное конформное отображение, нормирована: $f(z; r, \theta) = z + a_2(r, \theta) z^2 + \ldots$, то при изменении θ от 0 до π коэффициент $a_2(r, \theta)$ принимает все промежуточные значения между —2 и 2.

Пусть в задаче Грёнвалля $|a_2| = c \leqslant 2$, $a_2(r, \theta) = c$ и соответствующая экстремальная функция $f(z; r, \theta)$ обозначена через $F(z; r, c)$. Тогда справедлива теорема: Если $f(z) \in S$ и имеет коэффициент a_2 $c\,|a_2| = c$, то $|f(re^{i\varphi})| \leqslant F(r; r, c)$ для каждого r, $0 \leqslant r < 1$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. В заключение автор исследует поведение $F(r; r, c)$ при $r \to 1$. И. Е. Базилевич

3169. О коэффициентах мероморфных функций. Умедзава (The coefficients of meromorphic functions. Umezawa Toshio), Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 355—361 (англ.)

Обобщаются понятие диаметральной линии функции и понятие класса функций $D(p)$ (РЖМат, 1954, 5110) на случай мероморфных функций.

Диаметральной линией функции $f(z)$, мероморфной в области $|z| \leqslant 1$ и не имеющей нулей и полюсов на окружности $|z| = 1$, называется прямая, проходящая через точки $f(\zeta), 0, f(-\zeta)$ такие, что $\arg f(-\zeta) = \arg f(\zeta) + (s - t)\pi$, где $|\zeta| = 1$, а s и t — соответственно число нулей и число полюсов функции внутри круга $|z| < 1$. Существование диаметральных линий доказывается.

Функция $f(z)$, удовлетворяющая названным условиям, принадлежит классу $D(p)$, если реализуемый ею образ окружности $|z| = 1$ пересекает диаметральную линию функции в $2p$ различных точках.

Для функций класса $D(p)$ доказываются следующие теоремы:

Теорема 2. Пусть $f(z) \in D(p)$, $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ и $f(z) = z^q + \sum_{q+1}^{\infty} b_n z^n$ — ее разложение в степенные ряды соответственно на окружности $|z| = 1$ и в точке $z = 0$. Допустим также, что, кроме q-кратного нуля $z = 0$, функция имеет еще в круге $|z| < 1$ нули $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ и полюсы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$, причем $q + s - t = p > 0$. Тогда для всех $n \geqslant q + 1$ $|a_n| \leqslant A_n$, $|b_n| \leqslant B_n$, где A_n и B_n определяются равенствами:

$$F_1(z) = z^{q-t}(1-z)^{-2p} \prod_{i=1}^{s} (1 + |\beta_i|^{-1} z)(1 + |\beta_i|\, z) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{t} |\alpha_i| (1 - |\alpha_i| z^{-1})^{-1} (1 - |\alpha_i|\, z)^{-1} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} A_n z^n, \quad \max[|\alpha_i|, i = 1, 2, \ldots, t] < |z| \leqslant 1;$$

$$F_2(z) = z^q (1-z)^{-2p} \prod_{i=1}^{s} (1 + |\beta_i|^{-1} z)(1 + |\beta_i|\, z) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{t} (1 - |\alpha_i|^{-1} z)^{-1} (1 - |\alpha_i|\, z)^{-1} = z^q + \sum_{q+1}^{\infty} B_n z^n,$$

$$|z| < \min[|\alpha_i|, i = 1, 2, \ldots, t].$$

Оценки точные и знаки равенства в них достигаются для функции

$$F(z) = z^q (1-z)^{-2p} \prod_{i=1}^{s} (1 + \beta_i^{-1} z)(1 + \beta_i z) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{t} (1 - \alpha_i^{-1} z)^{-1} (1 - \alpha_i z)^{-1},$$

где α_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ и β_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ — положительные числа.

Теорема 3. Пусть $f(z) \in D(1)$, $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $|z| = 1$. Тогда для всех n

$$|a_{2n+1} - \bar{a}_{-(2n+1)}| \leqslant (2n+1)\,|a_1 - \bar{a}_{-1}|,$$

$$|a_{2n} - \bar{a}_{-2n}| \leqslant 2n\,|a_1 - \bar{a}_{-1}| + |a_0 - \bar{a}_0|.$$

Теорема 4. Пусть $f(z) \in D(p)$, $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $|z| = 1$. Тогда для всех $n \geqslant p \geqslant 2$

$$|a_{p+2n+1} - \bar{a}_{-(p+2n+1)}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p} \sum_{i=0}^{n} S(p, k, p+2i)\,|a_k - \bar{a}_{-k}| + |a_{p-1} - \bar{a}_{-(p-1)}|,$$

$$|a_{p+2n} - \bar{a}_{-(p+2n)}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p} \sum_{i=1}^{n} S(p, k, p+2i-1)\,|a_k - \bar{a}_{-k}| + |a_p - \bar{a}_{-p}|,$$

где

$$S(p, k, n) = \frac{\prod_{v=0}^{p-1}(n^2 - v^2)}{(p+k)!\,(p-k)!} \left\{ \frac{(p+k)(p+k-1)}{n^2 - (k-1)^2} + \frac{(p-k)(p-k-1)}{n^2 - (k+1)^2} \right\}.$$

Вопрос о том, являются ли оценки теорем 3 и 4 точными, остался открытым, причем оценки теоремы 3 точны в частном случае, когда $f(z)$ — регулярная функция.

Обобщаются на случай мероморфных функций понятие подкласса $S(p)$ класса $D(p)$, понятие класса функций $F(p)$ и его подкласса $C(p)$ (Umezawa T., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 813—820) и даются необходимые и достаточные их признаки (леммы 3, 4, 6 и теорема 1). Г. В. Корицкий

3170. Определение распределения значений гамма-функции по ее римановой поверхности. Хуккеман (Bestimmung der Wertverteilung der Gammafunktion aus ihrer Riemannschen Fläche. Huckemann Friedrich), Math. Z., 1954, **59**, № 4, 375—382 (нем.)

Риманова поверхность F гамма-функции $\Gamma(z)$ с тремя надлежащим образом выбранными неразбивающими ее разрезами переносится на поверхность модулярной функции, выпускающей четыре значения, а с нею — на область в единичном круге, ограниченную бесконечным числом дуг ортогональных окружностей, сходящихся к трем точкам, соответствующим трем граничным элементам F, и еще бесконечным числом радиальных отрезков, сходящихся к двум из этих же точек. Сечения области дугами ортогональных окружностей, сходящихся к указанным трем точкам, определяют «кольцеобразное» исчерпание F. Исходя из асимптотического поведения модулярной функции и используя квазиконформные отображения (Huckemann F., Mitt. Math. Sem. Giessen, 1952, 41, 1—36), автор оценивает модуль колец исчерпания. Полученные оценки позволяют применить теорему Тейхмюллера о модуле (Teichmüller O., Dtsch. Math., 1938 **3**, 621—678), из которой следует, что исчерпанию F соответствует «почти круговое» исчерпание z-плоскости. Это позволяет вести подсчет функции распределения $n(r, a)$ по расположению образов листов F в единичном круге,

полученном с помощью модулярной функции. Показывается, что

$T(r, \Gamma) = Cr \ln r (1 + \varepsilon(r))$ $(C > 0, \varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty)$,

$$\delta(a) = 1 - \overline{\lim} \frac{n(r, a)}{T(r)} = 0 \quad \text{для } a \neq 0, \infty,$$

$$\delta(0) = \delta(\infty) = 1,$$

$$\vartheta(a) = \underline{\lim} \frac{n_1(r, a)}{T(r)} = 0 \text{ для всех } a.$$

Уточнить C на этом пути не удается.

Л. И. Волковыский

3171. Построение функций с заданными свойствами на римановых поверхностях. Сарио (Construction of functions with prescribed properties on Riemann surfaces. Sario Leo), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 63—76 (англ.)

Автором был разработан линейный операторный метод (Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, № 2, 281—295) и связанный с ним экстремальный метод (там же, 1952, 72, № 3, 459—470; РЖМат, 1954, 2105) для построения функций с заданными особенностями и поведением на границе данной произвольной римановой поверхности, а также функций с заданным минимальным свойством в данном классе функций. Эти методы опираются на альтернирующий метод Шварца, соответствующим образом перенесенный на римановы поверхности (РЖМат, 1954, 2928).

В реферируемой (обзорной) работе приводятся некоторые результаты автора по указанным методам, историческая справка по альтернирующему методу Шварца и проблеме классификации римановых поверхностей, сводная таблица результатов по этой проблеме за последние годы (1948—1951) и библиография (56 названий). Приводим две теоремы и таблицу.

Пусть R — произвольная риманова поверхность, S_1 — компактная область на R, ограниченная аналитической жордановой кривой α, $S_2 = R - S_1 - \alpha$, s — пара функций: s_1 — гармоническая в $S_1 + \alpha$ и с особенностями в S_1, s_2 — гармоническая в S_2; L — нормальный линейный оператор (РЖМат, 1954, 2928). Тогда для существования на R однозначной гармонической функции p (с особенностями и граничным поведением как у s), удовлетворяющей условию $p - s = L(p - s)$, необходимо и достаточно, чтобы $\int_{\alpha^+ + \alpha^-} \bar{d}s = 0$ ($\bar{d}s$ — сопряженный дифференциал к ds, α^+, α^- — противоположно ориентированные берега α).

Пусть R — произвольная открытая риманова поверхность, $\{P\}$ и $\{F\}$ — классы аналитических функций на R с однозначными действительными частями и разложениями $P = p + i\bar{p} = z^{-1} + \sum_1^\infty a_\nu z^\nu$, $F = f + if = \sum_1^\infty b_\nu z^\nu$, $\operatorname{Re} b_1 = 1$, в параметрическом круге $K: |z| \leqslant 1$. Тогда для $\lambda \in [-1, 1]$ существует единственная функция $P_\lambda \in \{P\}$, минимизирующая выражение $m_\lambda(p) = 2\pi\lambda\alpha + \int_\beta p d\bar{p}$ (β — идеальная граница, $\alpha = \operatorname{Re} a_1$). При этом P-размах (the span)

$$\sigma_P = \alpha_{-1} - \alpha_1 = -\min \frac{2}{\pi} \int_\beta p d\bar{p} = -\frac{2}{\pi} \int_\beta p_0 d\bar{p}_0,$$

$$\frac{1}{\sigma_P} = \min \frac{1}{2\pi} D(f) = \frac{1}{2\pi} D(f_0),$$

где $p_0 = (p_{-1} + p_1)/2$, $f_0 = (p_{-1} - p_1)/\sigma_P$ и индексы $\pm 1, 0$ соответствуют $\lambda = \pm 1, 0$. Для подкласса $\{Q\} \subset \{P\}$, $Q = q + iq$, $\int dq = 0$ вдоль каждого разбивающего цикла, имеем соответствующий Q-размах с соответствующими экстремальными свойствами.

Пусть O_F — класс римановых поверхностей, на которых не существует функций класса F. Тогда

$$O_A \subset C_\beta = O_{MB} = O_{MD} \subseteq O_{HC} \subseteq O_{HB} \subseteq S_P = O_{PN} = O_{HBD} = O_{HD} \subset S_Q = O_{QN} = O_{KBD} = O_{KD} \subseteq O_{AD}$$

$$O_{AB} = O_{WE} \subset O_{AD}$$

и, кроме того, если поверхность R подобна однолистным, то

$$C_\beta = O_{HC} = O_{HB} = O_{HD} \subset O_{AB} \subset S_D = O_{ABD} = O_{AD} = O_{SE} \subset C_\gamma = O_{SB} = O_{SD},$$

$$C_\beta \subset M_\varepsilon \subset M_1 \subseteq O_{AB} \subset M_{1+\varepsilon} \subset M_{2-\varepsilon} \subset O_{AD} = M_2,$$

где буквы-индексы означают: 1) свойства функций H — однозначность, гармоничность и $\neq \text{const}$, K — то же, с мнимой частью, имеющей равные нулю периоды вдоль разбивающих циклов, A — однозначность, аналитичность и $\neq \text{const}$, W — мероморфность и $\neq \text{const}$, M — аналитичность, однозначность модуля и $\neq \text{const}$, S — однозначность, однолистность и $\neq \text{const}$, P — принадлежность классу $\{P\}$, Q — принадлежность классу $\{Q\}$, B — ограниченность, C — положительность, D — конечность интеграла Дирихле, E — выпускание множества значений положительной плоской меры, N — граничный интеграл $\int p d\bar{p} < 0$; 2) конформно-инвариантные свойства: S_P — P-размах равен нулю, S_Q — Q-размах равен нулю, C_β — емкость β равна нулю, C_γ — емкость каждой граничной компоненты равна нулю (см. реф. 3172), 3) M_λ (для R, подобных однолистным) — λ-мерная мера по Хаусдорфу границы поверхности равна нулю, ε — произвольно малая положительная величина. Заметим еще, что $O_{HB} \subset O_{HD}$ (РЖМат, 1954, 2107).

Л. И. Волковыский

3172. Емкость границы и граничной компоненты. Сарио (Capacity of the boundary and of a boundary component. Sario Leo), Ann. Math., 1954, 59, № 1, 135—144 (англ.)

Пусть R — произвольная открытая риманова поверхность, β — ее идеальная граница, $\{S\}$ — семейство аналитических функций на R вида $S = s + i\tilde{s} = \ln z + \sum_1^\infty a_\nu z^\nu$ в параметрическом круге $K: |z| \leqslant 1$ и с однозначной действительной частью на R. Тогда в $\{S\}$ существует главная функция $S_\beta = s_\beta + i\tilde{s}_\beta$, минимизирующая интеграл $\int_\beta s d\bar{s}$ (интеграл определяется с помощью исчерпания $R_n \nearrow R$), причем

$\int_\beta s d\bar{s} = \int_\beta s_\beta d\bar{s}_\beta + D(s - s_\beta)$, где D означает интеграл Дирихле по R. Величина $c_\beta = e^{-k_\beta}$, где $k_\beta = (2\pi)^{-1} \times \int_\beta s_\beta d\bar{s}_\beta$, называется емкостью β (для плоских областей она совпадает с обычной емкостью). Для класса функций $\{U\}$, $U = e^S$, имеем:

$$\min D(U) = D(U_\beta) = \pi c_\beta^{-2},$$

$$\min (\sup |U|) = \sup |U_\beta| = c_\beta^{-1},$$

где $U_\beta = e^{S_\beta}$.

Пусть γ — граничная компонента R, определяемая последовательностью аналитических жордановых кривых γ_n, разбивающих (каждая) R. Тогда для под

класса $\{T\} \subset \{S\}$ функций $T = t + i\bar{t}$ со свойством $\int_\gamma d\bar{t} = 2\pi$ ($\int_{\gamma_n} d\bar{t} = 2\pi$ для $n > n_0$) и $\int d\bar{t} = 0$ вдоль каждого неразбивающего цикла, не отделяющего γ от $= 0$, существует главная функция $T_\gamma = t_\gamma + i\bar{t}_\gamma$, минимизирующая интеграл $\int_\beta t\,d\bar{t}$, причем

$$\int_\beta t\,d\bar{t} = \int_\beta t_\gamma\,d\bar{t}_\gamma + D(t - t_\gamma).$$

Величина $c_\gamma = e^{-k_\gamma}$, где $k_\gamma = (2\pi)^{-1}\int_\beta t_\gamma\,d\bar{t}_\gamma$, называется емкостью граничной компоненты γ. Если поверхность R подобна однолистным, то среди унивалентных функций V, входящих в подкласс $\{V\} \subset \{U\}$, $= e^T$, существует главная функция V_γ такая, что

$$\min D(V) = D(V_\gamma) = \pi c_\gamma^{-2}.$$

В приложении к проблеме классификации римановых поверхностей получаются соотношения:

$$C_\beta = O_{MD} = O_{MBD} = O_{MB}$$

, если $c_\gamma \neq 0$ для всех граничных компонент,

$$C_\gamma = O_{SD} = O_{SB}$$

обозначения см. в реф. 3171). Л. И. Волковыский

3173. Об областях регулярности однозначных функций многих комплексных переменных (Переход от частного к общему). Норге (Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes. (Passage du local au global). Norguet François), Bull. Soc. math. France, 1954, 82, № 2, 137—159 (франц.)

Доказывается теорема: Если однолистная конечная область пространства C^n n комплексных переменных является областью локальной регулярности, то она есть область регулярности.

Для случая $n = 2$ эта теорема была доказана Ока (Oka K., Tôhoku Math. J., 1942, 49, 15—52). Устанавливается эквивалентность этой теоремы следующей: Пусть D — ограниченная однолистная область пространства C^n n комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Если $a_1 < a_2$ и области $D(\mathrm{Im}\, z_1 > a_1)$ и $D(\mathrm{Im}\, z_2 < a_2)$ есть области регулярности, то и D — область регулярности.

При доказательстве автор использует и упрощает метод Ока, что и дает возможность распространить теорему на случай $n > 2$. А. В. Лебедев

3174. Оболочки регулярности цилиндрической и полуцилиндрической областей. Бремерман (Die Holomorphiehüllen der Tuben- und Halbtubengebiete. Bremermann Hans J.), Math. Ann., 1954, 127, № 5, 406—423 (нем.)

Статья представляет часть диссертации автора Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen, Diss., Münster, 1951). Вопросы, указанные в заглавии, рассматриваются на основе одного из вариантов известной теоремы о непрерывном расположении особых точек регулярной функции (Kontinuitätssatz), который доказывается автором на основе свойств субгармонических функций.

Пользуясь терминологией Бохнера и Мартина (Бохнер С., Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1951, гл. 5, § 4), множество T_B точек пространства C^n, определяемое условиями: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B, -\infty < y_1 < < +\infty, \ldots, -\infty < y_n < +\infty$, где $z_j = x_j + iy_j$, B — область пространства переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, автор называет цилиндрической областью (Tubengebiet) или кратко — цилиндром; n-мерная область B называется основанием цилиндра.

В первой части статьи дается новое доказательство известной теоремы о том, что оболочка регулярности $H(T_B)$ цилиндрической области T_B в пространстве C^2 есть выпуклая оболочка, т. е. $H(T_B) = T_{\overline{B}}$, где $\overline{B}$ — выпуклая оболочка области B ($T_{\overline{B}}$ только тогда является выпуклой оболочкой T_B, когда $\overline{B}$ есть выпуклая оболочка области B).

Во второй части рассматривается случай полуцилиндрической области (Halbtubengebiet). Полуцилиндрической областью S_B в пространстве C^2 называется множество точек этого пространства, определяемое условиями

$$(P, u) \in G, \quad -\infty < v < +\infty,$$

где $w = u + iv$, G — любая трехмерная область пространства (P, u), которое есть прямое произведение некоторой римановой поверхности R (переменной P) и действительной u-оси конечной плоскости w.

Полуцилиндрическая область S_B с основанием

$$B = \{(P, u) \mid P \in G;\ V_1(P) < u < V_2(P)\},$$

где G — конечная риманова поверхность без внутренних точек разветвления, будет областью регулярности, если $V_1(P)$ — субгармоническая, а $V_2(P)$ — супергармоническая функции в G. Оказывается, что полуцилиндрическая область S_B с основанием $B = \{(P, u) \mid P \in G;\ U_1(P) < u < U_2(P)\}$ имеет оболочкой регулярности полуцилиндрическую область $S_{\overline{B}}$, основание которой $\overline{B} = \{(P, u) \mid P \in G;\ V_1(P) < u < V_2(P)\}$, где $V_1(P)$ — наибольшая субгармоническая миноранта $U_1(P)$, $V_2(P)$ — супергармоническая мажоранта $U_2(P)$.

Это предложение распространяется автором на любую полуцилиндрическую область, не содержащую внутри точек ветвления, и дается способ построения ее оболочки регулярности, который состоит в некотором расширении основания. А. В. Лебедев

3175. Абелевы модулярные функции. Пятецкий-Шапиро И. И., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 2, 221—224

Пусть ω — комплексная матрица из p строк и $2p$ столбцов, являющаяся матрицей периодов некоторой невырожденной абелевой функции от p переменных. Все квадратные матрицы A порядка $2p$ с рациональными элементами, для которых существует такая комплексная квадратная матрица α порядка p, что $\alpha\omega = \omega A$, образуют алгебру, называемую алгеброй умножений ω. Все возможные алгебры умножений были перечислены Альбертом (Albert A. A., Ann. Math., 1934, 35, № 3, 500). В работе исследуется совокупность $\Omega_{\mathfrak{A}}$ матриц ω с заданной алгеброй умножений $\mathfrak{A}$ и заданной главной матрицей R_0, т. е. такой рациональной кососимметрической матрицей порядка $2p$, что $\omega R_0 \omega' = 0$, $i\omega R_0 \omega' > 0$.

Совокупность таких целочисленных унимодулярных матриц U порядка $2p$, что из $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A}}$ следует $\omega U' \in \Omega_{\mathfrak{A}}$, образует группу, называемую автором модулярной группой $\Omega_{\mathfrak{A}}$. Если $\mathfrak{A}$ состоит только из кратных единичной матрицы, то эта группа совпадает с модулярной группой Зигеля.

Дается следующая характеристика модулярной группы $\Omega_{\mathfrak{A}}$. Рассматриваются все рациональные кососимметрические матрицы R порядка $2p$, для которых $\omega R \omega' = 0$ для всех $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A}}$. Известно, что все собственные значения RR_0^{-1} вещественны. Те матрицы R,

для которых эти собственные значения положительны, образуют множество $\mathfrak{N}$. Модулярная группа $\Omega_{\mathfrak{A}}$ состоит из матриц U, для которых $U'\mathfrak{N}U = \mathfrak{N}$, $U'\mathfrak{A}U' = \mathfrak{A}$.

В результате отождествления матриц вида $\alpha\omega$, где ω — фиксированная матрица из $\Omega_{\mathfrak{A}}$, а α — любая квадратная матрица порядка p, $\Omega_{\mathfrak{A}}$ превращается в аналитическое многообразие $H_{\mathfrak{A}}$. В случае, когда $\mathfrak{A}$ состоит только из кратных единичной матрицы, $H_{\mathfrak{A}}$ совпадает с верхней полуплоскостью Зигеля.

Далее автор ограничивается тем случаем, когда алгебра умножений $\mathfrak{A}$ изоморфна чисто вещественному полю алгебраических чисел k степени $n \setminus p$ (один из случаев, к которым согласно Алберту сводятся все возможные алгебры умножений). В этом случае $H_{\mathfrak{A}}$ аналитически эквивалентно произведению n полуплоскостей Зигеля степени $r = p/n$. Пусть $z \in H_{\mathfrak{A}}$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где z_i — матрицы из перемножаемых полуплоскостей. Рассматриваются автоморфизмы $H_{\mathfrak{A}}$, определяемые формулами

$$z_i \to (A^{(i)}z_i + B^{(i)})(C^{(i)}z_i + D^{(i)})^{-1},$$

где $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — симплектическая матрица с целыми элементами из k, а $\begin{pmatrix} A^{(i)} & B^{(i)} \\ C^{(i)} & D^{(i)} \end{pmatrix}$ имеют сопряженные элементы. Группа, образованная этими автоморфизмами, соизмерима с модулярной группой $\Omega_{\mathfrak{A}}$.

Функция $\varphi(z)$, регулярная в $H_{\mathfrak{A}}$, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(Uz) = \prod_{i=1}^{n} |\, C^{(i)}z_i + D^{(i)} \,|^g \varphi(z)$$

и некоторым ограничениям, относящимся к ее поведению в точках выхода фундаментальной области модулярной группы на границу, называется модулярной формой веса g. Отношение двух модулярных форм одного веса определяет модулярную функцию. Модулярные функции образуют поле алгебраических функций от $nr(r+1)/2$ переменных.

Указывается погружение многообразия $H_{\mathfrak{A}}$ в полуплоскость Зигеля в качестве такого аналитического многообразия Z, что те преобразования модулярной группы Зигеля, которые переводят Z в себя, индуцируют в нем группу преобразований, имеющую в модулярной группе $\Omega_{\mathfrak{A}}$ конечный индекс. Доказательства в работе не приведены. И. Р. Шафаревич

3176. О римановой кривизне неевклидова пространства многих комплексных переменных. Хуа Ло-гэн (多複變數非歐空間中黎曼曲率的估值問題. 華羅庚), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 2, 143—170 (кит.; резюме англ.)

Доказывается, что риманова кривизна неевклидова пространства по двумерному направлению $R \leqslant 2$. Этот результат обобщает одну теорему Фукса (Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М.—Л., Гостехиздат, 1948, 424). Кроме того, устанавливается, что $R \geqslant -n$, где n — комплексная размерность пространства. А. В. Лебедев

3177. Коническая моногенность. Федоров В. С., Матем. сб., 1954, **34**(76), № 3, 417—428

Понятие классической моногенности двух функций (u, v) двух независимых переменных (x_1, x_2) обобщается на случай вектор-функции $f(u, v, w)$ в трехмерном евклидовом пространстве $E(x_1, x_2, x_3)$. Полученные результаты устанавливают в основном связь между обобщенным понятием моногенности и свойствам функций (u, v, w) независимых переменных (x_1, x_2, x_3). В области Δ пространства E имеется однозначная и ограниченным модулем вектор-функция f. Каждо точке $M \in \Delta$ отнесено множество $A(M)$ ортов a, дл каждого из которых существует производная f_a, н прерывная на множестве $A(M)$. Пусть, кроме того, дл всех ортов из $A(M)$ величины $a \cdot f$ и $f_a \cdot f_a$ имеют одно то же значение при фиксированном M. Автор называ f A-моногенной вектор-функцией в области Δ для да ного множества $A(M)$, $M \in \Delta$. Термин «коническа моногенность» относится к тому случаю, когда в ка дой точке $M \in \Delta$ множество $A(M)$ образует конич скую поверхность с вершиной M, причем кажд прямолинейной образующей приписываются два прот воположных направления.

Приведем некоторые результаты работы, относ щиеся к конической моногенности. Предполагается, ч $A(M)$ содержит в каждой точке M все орты a, д которых $\sin\theta = \psi(M)$, где θ — угол a с осью x_3, функция $\psi(M)$ удовлетворяет условию $0 < \psi(M) < 1$, что существует непрерывная в Δ производная f_x Доказывается, что $u + iv$ не зависит от x_3 и являет голоморфной функцией $x_1 + ix_2$ в проекции $\Delta_{1,2}$ о ласти Δ на плоскость (x_1, x_2), а w не зависит от x_1 x_2. Область Δ всегда считается выпуклой.

Второй результат в известном смысле дает обра ную теорему.

Пусть w — дифференцируемая функция x_3 п $c < x_3 < d$, $u + iv$ — голоморфная функция $x_1 + ix_2$ области $c < x_k < d$ $(k = 1, 2)$. Тогда вектор-функц f имеет в области $\Delta: c < x_k < d$ $(k = 1, 2, 3)$ следу щие свойства:

1) если N — множество тех точек Δ, в котор $u_{x_2} = 0$, $u_{x_1} = w_{x_3}$, то $A(M)$ содержит все орты в кажд точке $M \in N$;

2) если N совпадает с Δ, то $f = ar + c$, где a постоянный скаляр, $r = (x_1, x_2, x_3)$ и c — постоянн вектор;

3) на множестве $D = \Delta \setminus N$ вектор-функция f ес A-конически моногенная функция для всякого множ ства $A(M)$ ортов, определенных в каждой точке $M \in$ уравнением $\sin\theta = \psi(M)$, где $\psi(M)$ — произвольно з данная функция точки $(0 \leqslant \psi(M) \leqslant 1)$.

Во второй части работы указывается другой подх к понятию моногенности, использующий не толь скалярное, но и векторное произведение $a \times f_a$. Док зываются теоремы, в известном смысле сходные с уп занной выше первой теоремой. Если при фиксированн M постоянны $a \cdot f_a$ и $a \times f_a$, причем $A(M)$ в кажд точке M содержит все орты, перпендикулярные оси x то $u + iv = h(x_1 + ix_2, x_3)$, где h — голоморфн функция $x_1 + ix_2$, и $w = w(x_3)$. При этом не предп лагается непрерывности f_a на $A(M)$. Если, кро того, $A(M)$ содержит в каждой точке M два ор параллельных оси x_3, то $f = ar + c$. В. И. Смирн

3178. Введение в теорию функций комплексно переменного. Привалов И. И. (Учебник д вузов), Изд. 9-е, 444 стр., М., Гостехиздат, 19 10 р. 40 к.

9-е издание отличается от предыдущего некоторы уточнениями и поправками. В частности, теорема существенно особой точке (стр. 219) именуется теорем Ю. В. Сохоцкого.

Содержание книги по главам: 1. Комплексные числ 2. Комплексное переменное и функции комплексно переменного; 3. Линейные и другие простейшие п образования; 4. Теорема Коши. Интеграл Ко 5. Ряды аналитических функций, разложение анал

ческой функции в степенной ряд; 6. Изолированные обые точки однозначной функции; 7. Теория вычетов; Теорема Пикара; 9. Бесконечные произведения и иложения их к аналитическим функциям; 10. Аналитическое продолжение; 11. Элементы теории эллипических функций; 12. Общие принципы теории конформого отображения; 13. Общие свойства однолистных нкций. А. А. Конюшков

79 К. **Функции комплексного переменного. Мартан** (Funkce komplexní proměnné. Martan František, I. vyd., 184 s., Praha, SPN, 1953, 18.50 Kčs.), Česká kniha, 1954, № 5, 147 (библ.)

3180 Д. **О мероморфных периодических функциях. Мюгель** (Über meromorphe periodische Funktionen. Mügel C. W. Diss., Technische Hochschule, Braunschweig, 1954,) Z. Vereines dtsch. Ingr., 1954, 96, № 15/16, 502 (библ.)

См. также: 2989, 3038, 3185, 3204, 3297

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

81. **Замечания к прежней заметке (т. 57, стр. 539—540). Винтнер** (Remarks to an earlier note. (Vol. 57, pp. 539—540), Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1954, 76, № 3, 717—720 (англ.)

Отмечается, что прежние результаты автора о максильной области существования решения дифференального уравнения 1-го порядка с аналитической авой частью (Amer. J. Math., 1953, 57, 539—540) гут быть перенесены на случай уравнения

$$dy/dx = f(x, y),$$

е функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности пеменных x, y и регулярна лишь по y, т. е. если 0) — начальная точка, то

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\, y^k, \qquad (1)$$

ичем ряд (1) сходится равномерно при $0 \leqslant x \leqslant a$ и $|y| < b$ (y — комплексно, a, b — положительные пооянные). В частности, доказывается, что для известго метода Перрона (Perron, Sitzungsber. Heidelberg. kad. Wiss., 1919, part A, № 8) может быть улучшен тервал сходимости решения, данный Перроном.

Б. П. Демидович

82. **О существовании решения системы функционально-дифференциальных уравнений. Франклин** (On the existence of solutions of systems of functional differential equations. Franklin Joel), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 363—369 (англ.)

Рассматривается система функционально-дифференциальных уравнений

$$y_\nu(t)/dx = f_\nu(x, Y(x)) \quad (0 \leqslant x \leqslant x_1;\ \nu = 1, \ldots, m), \qquad (1)$$

е $Y(x)$ — система функций $\{y_h(u_k(x))\}$ $(h = 1, \ldots, n;$ $= 1, \ldots, m)$, $u_k(x) \leqslant x$ — заданные непрерывные ункции на $[0, x_1]$. Функции f_ν предполагаются неерывными в надлежащем многомерном замкнутом тервале. Начальные непрерывные функции $g_h(x)$ даются на $[x_0, 0]$, где $x_0 = \min(x_{01}, \ldots, x_{0m})$; $x_{0k} = \min_x u_k(x)$.

Доказывается существование (и в надлежащих случаях единственность) на $[x_0, x_1]$ системы функций $y_\nu(x)$, являющихся решениями системы (1) на $[0, x_1]$ и довлетворяющих начальным условиям $y_\nu(x) = g_\nu(x)$ а $[x_0, 0]$. При доказательстве используется метод поледовательных приближений и метод Пеано.

Аналогичные вопросы рассматривались в работе еферента (РЖМат, 1954, 2121). П. И. Романовский

83. **Решение специальных обыкновенных дифференциальных уравнений посредством бесконечных операторов. Применение к задаче баллистики. Мюллер** (Lösung spezieller gewöhnlicher Differentialgleichungen durch unendliche Operatoren. Anwendung auf das ballistische Problem. Müller R.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 7, 273—274 (нем.)

Указанный в заглавии способ лишь поясняется для некоторых уравнений 1-го порядка. Например, неотрицательное решение уравнения

$$y' = \psi(x)\sqrt{y} + f(x), \quad x \geqslant 0, \qquad (1)$$

обращающееся в 0 при $x = 0$, дается формулой

$$y = F + \int_0^x \psi \sqrt{F + \int_0^x \psi \sqrt{\ldots} dx}\, dx, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\, dt. \qquad (2)$$

Не только сходимость, но даже точный смысл (2) не обсуждается.

Для пояснения быстроты сходимости автор берет $f(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 2$, однако его рассуждения неясны.

В заключение рассматривается система уравнений плоской баллистики

$$\dot{v} = -cf(v) - g\sin\vartheta, \quad v\dot{\vartheta} = -g\cos\vartheta,$$

приводящаяся к одному уравнению вида (1):

$$d(v\dot{v})^2/dv = 2v(g^2 - c^2 f^2) \pm \sqrt{(v\dot{v})^2}\, 2c(2f + vf').$$

М. К. Фаге

3184. **О некоторых уравнениях Риккати. Николеску** (Asupra ecuației lui Riccati. Nicolescu Alex.), Gaz. mat. și fiz., 1954, 6, № 3, 128—130 (рум.)

Обобщение условий интегрируемости уравнения Риккати

$$dy/dx = ay^2 + 2by + c \qquad (1)$$

(a, b, c — функции x), найденных Помпейю (Pompeiu D., C. r. Acad. sci, 1915, 161).

При помощи замены переменного $z = \lambda y + \mu$ уравнение (1) переходит в уравнение Бернулли

$$dz/dx = Az^2 + Bz,$$

имеющее частное решение: $z = 0$, что дает частное решение уравнения (1): $y = -\mu/\lambda$. Рассматриваются частные значения функций a, b, c: $\lambda = a$, $\mu = b$; $\lambda = 2b$, $\mu = c$, $b \neq 0$. Каждому из этих случаев отвечает особый критерий интегрируемости в квадратурах уравнения (1). Н. В. Сахаров

3185. **К теории уравнения Риккати. Виттих** (Zur Theorie der Riccatischen Differentialgleichung. Wittich H.), Math. Ann., 1954, 127, № 5, 433—440 (нем.)

Доказано, что если уравнение $w' = R(z, w)$ обладает в $0 < |z - a| < \rho$ однозначным аналитическим решением с существенной особенностью в точке $z = a$, то $R(z, w)$ имеет вид $R(z, w) = a_0(z) + a_1(z)\, w + a_2(z)\, w^2$.

Этот результат был дан в 1913 г. Мальмквистом в несколько иной формулировке. Для доказательства автор выводит сначала свойства однозначных решений приведенного уравнения в окрестности существенно особой точки. К. Я. Латышева

3186. Некоторые свойства дифференциального уравнения (II). Серс (Some properties of a differential equation (II). Sears D. B.), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 3, 354—360 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$d^2y/dx^2 = f(x)\,y, \qquad (1)$$

где $f(x)$ — непрерывна при $x \geqslant 0$. Изучается вопрос о существовании (или отсутствии) нетривиальных решений $y = \varphi(x)$, принадлежащих классу $L^p(0, \infty)$, где $p \geqslant 1$.

В прежней работе автора (J. London Math. Soc., 1952, 27, 180—188) было доказано, что если

$$|f(x)| \leqslant \frac{p+1}{p^2x^2} + \frac{p+2}{p^2x^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\log x \log_2 x \ldots \log_r x} + \sigma(x)$$

при $x \geqslant x_0$ и $n \geqslant 0$, где $x\sigma(x) \in L(x_0, \infty)$, то не существует решения $\varphi(x) \in L^p(0, \infty)$. В случае $n = 0$ логарифмические члены отсутствуют. Постоянные $(p+1)/p^2$ и $(p+2)/p^2$ являются наилучшими.

В настоящей работе уточняется оценка для остаточного члена $\sigma(x)$. Доказывается, что: 1) если $p > 1$, то $x^{2q-1}\{\sigma(x)\}^q \in L(x_0, \infty)$, где $1/p + 1/q = 1$; 2) если же $p = 1$, то $\sigma(x) = O(x^{-2})$ при $x \to \infty$. Б. П. Демидович

3187. Метод преобразований в линейных дифференциальных уравнениях с переменными коэффициентами. Аселтайн (A transform method for linear time-varying systems. Aseltine J. A.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 6, 761—764 (англ.)

Излагается метод получения интегральных преобразований вида

$$L[q(t)] = Q(\zeta) = \int_0^\infty q(t)\,h(\zeta, t)\,dt,$$

($h(\zeta, t)$ — функция t и оператора преобразования ζ), которые переводят линейные дифференциальные уравнения вида

$$a(t)\,q''(t) + b(t)\,q'(t) + d^2q(t) = e(t)$$

в алгебраические уравнения $f(\zeta)\,Q(\zeta) + d^2Q(\zeta) = E(\zeta) +$ [члены, соответствующие начальным условиям].

Частными случаями являются преобразования Лапласа и Меллина, а также преобразование Мейера. Для последнего преобразования приведена таблица некоторых функций и их изображений.

Доказана теорема свертки для этого обобщенного интегрального преобразования, позволяющая использовать его для получения передаточной функции систем (в частности, систем регулирования) с переменными параметрами. И. М. Смирнова

3188. Об одной двойной задаче о собственных значениях. Зибер (On a double eigenvalue problem. Ziebur A. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 201—202 (англ.)

Изучается задача: найти такое число $a > 0$, для которого существует функция $y(x) \not\equiv 0$ $(0 \leqslant x \leqslant b)$, и целое $m > 1$ такие, что

$$\left(\frac{y'}{p(x)}\right)' + \lambda\frac{q(x)}{(a + r(x))\,p^2(x)}\,y = 0; \quad y(0) = y(b) = 0,$$

где $\lambda = m^2 - 1$, $q(x) > 0$, $r(x) \geqslant 0$ $(0 \leqslant x \leqslant b)$, $p(x) > 0$ $(0 < x < b)$, функции p, q и r класса C^2 и $p'(0) \neq 0$, $p'(b) \neq 0$.

Доказывается теорема: Пусть $0 < a_1 < a_2$. Тогда существует число a, $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$, такое, что $\lambda_n = \lambda_n(a) = m^2 - 1$ для некоторого m.

Эта задача встречается при изучении жестко поверхностей вращения. П. Д. Калаф

3189. О фундаментальных матричных решени Зиммерберг (On fundamental matrix solutio Zimmerberg Hyman J.), Proc. Am Math. Soc., 1954, 5, № 3, 391—394 (англ.)

Рассматривается вопрос о существовании матри Грина

$$G(x, t) = 1/2\,Y(x)\,[|x - t|\,I + D^{-1}\Delta]\,Y^{-1}(t)$$

для уравнения

$$L[y] \equiv y' - A(x)\,y = 0,$$

где $A(x)$ — квадратная матрица порядка n, элемен которой — комплексные непрерывные функции дейст тельного переменного x, $a \leqslant x \leqslant b$. Работа продолж исследования других авторов (Miller K. S., Schi M. M., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 433—441; W. T., Amer. J. Math., 1931, 53, 443—459). В. Е. Слив

3190. К теории захватывания при малой амплит внешней силы. Хохлов Р. В., Докл. АН СС 1954, 97, № 3, 411—414

На примере захватывания автоколебательной систе малой внешней синусоидальной силой излагается ме решения задач о действии малых внешних периоди ских сил на автоколебательные системы томсо ского типа.

Для уравнения

$$\dot{x} - 2\delta_0(x)\,\dot{x} + \omega_0^2 x = E\omega_0^2\cos pt,$$

описывающего колебания напряжения x в конт лампового генератора, решение представляется в в

$$x = A\sin(pt - \varphi),$$

где амплитуда A и фаза φ приближенно определяю из уравнений

$$\dot{A} = \delta(A)\,A + \cos\varphi,\ E\omega_0/2, \dot{\varphi} = p - \omega_0 - \sin\varphi.\ E\omega_0/$$

Для случая, когда действующая сила имеет ма по сравнению с $A_0\delta_0'\omega_0$ амплитуду, где A_0 — амплит свободных автоколебаний, правые части уравнений разлагаются в ряд по параметру μ, который в окончат ных формулах полагается равным единице. Это возможность приближенно довести решение уравне (1) до конца. Полагая $A = A_0 + \mu a\,(\mu t)$ и пренебре величинами порядка μ^2, автор получает

$$a(t) = {}^1/_2 E\omega_2\ A_0^{-1}\,|\,d\delta/dA\,|_{A=A_0}\cdot\cos\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = p - \omega_0 - \sin\varphi\cdot E\omega_0/2A_0.$$

При этом необходимо, чтобы одновременно вы нялись неравенства $E/A_0 \ll \delta_0/\omega_0$, $E/A_0 \gg (\delta_0/$ Решение (2) получается путем обращения интег $t = \int(p - \omega_0 - {}^1/_2 E\omega_0 A_0^{-1}\sin\varphi)^{-1}d\varphi$. Производится лиз явления захватывания, выясняются причины хватывания при малой амплитуде внешней с Ю. А. Митропольс

3191. Об одном обобщении осцилляционной теор Осгуда на случай нелинейных дифференциальных у нений. Там Цой-так (An extension of Osgo oscillation theorem for a nonlinear differential e tion. Taam Choy-Tak), Proc. Amer. M Soc., 1954, 5, № 5, 705—715 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$(m(t)\,x')' = \sum_{i=1}^{k} f_i(t)\,x^{2i-1} = 0,$$

где $[m(t)]^{-1}$, $f_1(t) \ldots f_k(t)$ — действительные, нес

тельные измеримые функции на полупрямой $T \leqslant t < \infty$, тегрируемые по Лебегу на каждом отрезке $T \leqslant t \leqslant R$. танавливается теорема:
Пусть для всех $T \leqslant t < \infty$ выполнены условия: $(t) < m_0$, $m_0 > 0$; $f_1(t) \geqslant f_0 > 0$; $m(t) f_i(t) \geqslant 0$, $1, 2, \ldots, k$; $m(t) f_i(t) \geqslant r > 0$ для некоторых i; все $t) f_i(t)$ или невозрастающие или неубывающие. Тог- каждое решение колеблется бесчисленное множест- раз на всякой полупрямой $T \leqslant T' < t < \infty$, причем плитуды колебаний остаются равномерно ограничен- ми. Амплитуды меняются монотонно: они убывают, ли $m(t) f_i(t)$ возрастают, и наоборот. Если все $t) f_i(t)$ равномерно ограничены, амплитуды колеба- й не могут быть меньше некоторой положительной станты.
Далее указываются еще некоторые условия ограни- ности решений исследуемого уравнения. Установ- нные теоремы являются обобщениями теоремы гуда для линейного уравнения $x'' + f(t) x = 0$ good W. F., Bull. Amer. Math. Soc., 1919, 25, 3—221).
В. В. Немыцкий

92. Новые решения уравнения Фолкнера — Скей- на. Стюартсон (Further solutions of the Falkner-Skan equation. Stewartson K.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, № 3, 454—465 (англ.)
Изучается важная в теории пограничного слоя крае- я задача

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1$$

я уравнения

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0 \quad (f = f(\eta);\ 0 \leqslant \eta < \infty). \qquad (1)$$

ри этом физический смысл имеют только решения, я которых $|f'(\eta)| \leqslant 1$. Ранее Хартри (Hartree D. R., oc. Cambridge Philos. Soc., 1937, **33**, 223—239) пока- л, что если $\beta > \beta_0 \approx -0{,}1988$, то имеется целое се- йство таких решений, отвечающих значениям $f''(0)$, ключенным в некотором отрезке $0 \leqslant f''(0) \leqslant c(\beta)$, ичем для $f''(0) = c(\beta)$ будет $f' \underset{\eta \to \infty}{\longrightarrow} 1$ быстрее всего.
тор, опираясь на результаты Хартри и на теоремы сравнении решений уравнения (1) для разных зна- ний β и $f''(0)$ (в этих теоремах изучается зависи- сть f от f'), доказывает, что при $\beta < \beta_0$ нет реше- й, удовлетворяющих всем поставленным условиям. новное внимание уделяется исследованию решений, для торых $f''(0) < 0$. Автор ищет решения, для которых $0) = f'(0) = 0$, $f'(\alpha) = 1$ (при заданном α), а затем ссматривает поведение этих решений при $\alpha \to \infty$. ридимому (автор не располагает полным доказатель- вом этого), при достаточно большом α и для $\beta_0 < \beta < 0$ будет три таких решения. Из них большее и $\alpha \to \infty$ стремится к решению, указанному Хартри, ньшее — к решению, для которого $f(\infty) = -1$ (что не дится), а среднее — к новому решению поставлен- й краевой задачи, для которого $f''(0) = \bar{c}(\beta) < 0$. риведена таблица значений этого нового решения ри нескольких значениях β; зависимость $\bar{c}(\beta)$ от β оказана на графике. Показано, что $\bar{c}(\beta) > -2{,}1\,|\beta|^{3/4}$. Далее приводятся некоторые результаты, носящиеся к краевой задаче $f(0) = f''(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$ для (1). Обсуждается физический смысл получен- ых решений. В изложении доказательства (некоторые з них не полны) перемежаются с гипотезами и утв- ерждениями, подкрепленными лишь подсчетами. Не- которые формулировки неточны.
А. Д. Мышкис

93. Некоторые проблемы качественной теории диф- ференциальных уравнений. (Обзор современной ли- тературы). Немыцкий В. В., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3, 39—56
Доклад, прочитанный в марте 1953 г. в Московском математическом обществе. Рассматриваются достижения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений примерно за последние пять лет. Первая часть посвящена задачам качественной теории на плоскости. Отмечаются результаты многих авторов, характеризующие поведение интегральных линий в целом. Большое внимание уделено достаточным условиям существования периодических решений. Во второй части обозреваются предложения о свойствах интегральных линий в окрестности особой точки системы уравнений $dx_i/dt = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, $n > 2$, или аналогичной системы уравнений с более сложными правыми частями. Отражены и немногочисленные результаты, относящиеся к поведению интегральных линий в целом, в частности к существованию периодических решений в пространстве. В третьей части приводятся результаты об асимптотическом поведении и условиях устойчивости решений системы линейных уравнений с переменными коэффициентами. Отмечен также новый способ получения оценок координат решений названной системы.
Библиография, 58 названий.
А. Д. Горбунов

3194. Качественная картина поведения интегральных кривых в окрестности особой точки в одном случае. Скачков Б. Н., Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 8, 65—69
Рассматривается система уравнений

$$dx/dt = \alpha x + \beta y + X, \qquad dy/dt = \gamma x + \delta y + Y,$$
$$dz/dt = Z, \qquad (1)$$

где X, Y и Z — голоморфные в окрестности нуля функции x, y, z, разложения которых в ряды по степеням этих переменных не содержат линейных членов, а α, β, γ, δ и коэффициенты разложений X, Y, Z — вещественные постоянные, причем корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha - \varkappa, & \beta \\ \gamma, & \delta - \varkappa \end{vmatrix} = 0$$

имеют отличные от нуля и совпадающие по знаку действительные части. Предполагается, что $Z(u(z), v(z), z) \equiv 0$, где, $x = u(z)$ и $y = v(z)$ — решение системы уравнений

$$\alpha x + \beta y + X(x, y, z) = 0, \quad \gamma x + \delta y + Y(x, y, z) = 0.$$

Из результатов А. М. Ляпунова (Общая задача об устойчивости движения, ГИТТИ, 1950) следует, что при этих условиях система (1) допускает интеграл

$$z = f(x, y, c), \qquad (2)$$

где $f(x, y, c)$ — голоморфная в окрестности нуля функция x, y, c, $f(0, 0, 0) = 0$, причем на каждой из поверхностей (2) имеется положение равновесия

$$x = u(c), \quad y = v(c), \quad z = c. \qquad (3)$$

Показывается, что интегральные кривые системы (1) образуют на поверхности (2), в окрестности точки (3): 1) фокус при любом достаточно малом c, если корни $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ комплексны; 2) узел при любом достаточно малом c, если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ вещественны и различны; 3) вырожденный узел при $c = 0$; фокус, узел или вырожденный узел при $c \neq 0$, если $\varkappa_1 = \varkappa_2$; в последнем случае при наличии фокуса на поверхностях $c > 0$ возможен узел на поверхностях $c < 0$ и наоборот.
А. Ф. Андреев

3195. К математической теории катализа. Васильева А. Б., Вестн. Моск. ун-та, 1954, № 6, 39—46
А. Н. Тихоновым доказано (Матем. сб., 1950, 27, № 1), что решение уравнения

$$\mu \frac{d\zeta}{d\eta} = F(\zeta, h), \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta} > 0, \quad \zeta|_{\eta=\eta_0} = \zeta^0, \qquad (1)$$

для $\eta < \eta^0$ удовлетворяет условию $\lim_{\mu\to 0}\zeta(\eta, \mu) = \overline{\zeta}(\eta)$, где $\overline{\zeta}(\eta)$ — решение вырожденного уравнения $\overline{F}(\zeta, \eta) = 0$. Автором построена функция $\zeta_0(\eta, \mu)$, которая служит равномерным приближением к $\zeta(\eta, \mu)$ на всем замкнутом интервале $\eta \leqslant \eta^0$:

$$\zeta_0(\eta, \mu) = \overline{\zeta} + \tilde{\zeta}(\eta, \mu) - \tilde{\overline{\zeta}},$$

$\tilde{\zeta}(\eta, \mu)$ — решение уравнения (1), если в правой части $\eta = \eta^0$, а $\tilde{\overline{\zeta}}$ — решение вырожденного уравнения $F(\tilde{\overline{\zeta}}, \eta_0) = 0$.

Этот метод применяется к уравнению катализа

$$\mu\frac{d\zeta}{d\eta} = 1 - \lambda\frac{1-\zeta}{\zeta\eta} \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 1), \quad \zeta(1) = 1. \qquad (2)$$

Для определения поправок 1-го и 2-го порядка решения уравнения (2) для $\eta < \eta^0$ используется общий результат автора (Матем. сб., 1952, **31**, № 3). На графиках сравнивается точное решение (2), полученное в результате численного интегрирования, с построенными приближениями.

В. П. Маслов

3196. К вопросу о существовании почти периодических решений нелинейных систем с малым параметром в случае вырождения. Бирюк Г. И., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 4, 577—579

Рассматривается система

$$dx/dt = Ax + \varepsilon F(t, x), \qquad (1)$$

где x — n-мерный вектор, A — постоянная матрица порядка n, а $F(t, x)$ — вектор вида

$$F(t, x) = \sum_{\mu} e^{i\mu t} F_{\mu}(x). \qquad (2)$$

Сумма распространяется на конечное число некоторых вещественных чисел μ, а $F_{\mu}(t)$ — полиномы относительно x ($F^*_{\mu}(x) = F_{-\mu}(x)$).

В предыдущей работе автор установил существование почти периодических решений (1) в случае, когда характеристическое уравнение $\mathrm{Det}\,\|\lambda E - A\| = 0$ не имеет мнимых корней (см. РЖМат, 1955, 729). В настоящей работе рассмотрен случай, когда характеристическое уравнение имеет мнимые корни.

После некоторой замены переменной x (1) приводится к виду

$$dz/dt = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k A_k(z) + \varepsilon^{m+1} F_m(t, z, \varepsilon), \qquad (3)$$

где m произвольно, $F_m(t, z, \varepsilon)$ имеет вид, аналогичный (2), и регулярно по ε в окрестности $\varepsilon = 0$, $A_k(z)$ — векторы.

Теорема. Пусть 1) для любого $m > m_0$ система

$$d\xi/dt = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k A_k(\xi)$$

имеет стационарное решение $\xi = \xi_m$, равномерно ограниченное при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$; 2) корни p уравнения

$$\mathrm{Det}\left\| pE - \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \frac{\partial A_k}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=\xi_m} \right\| = 0$$

удовлетворяют условию $|\mathrm{Re}\, p| \geqslant \gamma_m |\varepsilon|^q$, $\gamma_m > 0$, $m \geqslant m_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $q > 0$ — фиксированное число. Тогда для $\sigma > 0$ можно найти $\varepsilon_m(\sigma) > 0$ такое, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_m(\sigma)$, $m > 2q(n+1) - 1$ система (3) имеет единственное почти периодическое решение $z(t, \varepsilon)$, для которого $|z(t, \varepsilon) - \xi_m| \leqslant \sigma$.

Г. Л. Мизерюк

3197. О резонансе в квазигармонических системах. Малкин И. Г., Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 4, 459—463

При некоторых ограничениях даются необходимые и достаточные условия существования почти периодических решений неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}(t)\, x_r + f_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n),$$

где $p_{rs}(t)$ — непрерывные периодические функции с общим периодом ω, $f_s(t)$ — непрерывные почти периодические функции.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ — все корни характеристического уравнения системы (1), модули которых равны единице, причем каждый корень λ_j выписывается столько раз, сколько групп решений ему соответствует, и $\psi_{s1}(t), \ldots, \psi_{sk}(t)$ — линейно независимые квазипериодические решения сопряженной однородной системы:

$$dy_s/dt = -\sum_{r=1}^{n} p_{rs}(t)\, y_s \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Если функции $f_s(t)$ — конечные тригонометрические суммы, то система (1) имеет почти периодическое решение тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t \sum_{s=1}^{n} \psi_{sj}(t)\, f_s(t)\, dt = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

В частности, если $k = 0$, то всегда существует единственное почти периодическое решение.

Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_p$ — спектр частот системы функций $f_s(t)$. Если не выполнено ни одно из соотношений:

$$\omega^{-1}(2r\pi \pm \sqrt{-1}\ln\lambda_j) + \nu_q = 0$$

$(j = 1, \ldots, k;\ q = 1, \ldots, p;\ r$ — целое) (нерезонансный случай), то система (1) имеет почти периодическое решение при любых таких функциях $f_s(t)$; если же существуют соотношения вида (4) (резонансный случай), то система (1) имеет почти периодические решения лишь, если выполнены условия (3).

Если число групп решений, отвечающих каждому корню λ_j $(j = 1, \ldots, k)$, равно кратности этого корня, то система (1) допускает почти периодические решения тогда и только тогда, если ограничены функции

$$\int_0^t \sum_{s=1}^{n} \psi_{sj}(t)\, f_s(t)\, dt \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Нерезонансный случай для приведенного линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с периодическими коэффициентами был рассмотрен В. В. Степановым (Прикл. матем. и механика, 1950, **14**, № 3, 311—312).

Б. П. Демидович

3198. Устойчивость и почти периодичность в динамических системах. Патнам (Stability and almost periodicity in dynamical systems. Putnam C. R. Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 352—356 (англ.)

Рассматривается динамическая система, определяемая системой n дифференциальных уравнений с правыми частями из класса C^1. Различаются два типа устойчивости.

(A) Пусть t_0 фиксировано. Решение $x(t)$ системы называется A-устойчивым относительно инвариантного множества Ω, если $x(t) \subset \Omega$ и если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ при $-\infty < t < \infty$, когда $y(t) \subset \Omega$ и $|x(t_0) - y(t_0)| < \delta$.

(B) Решение $x(t)$ называется B-устойчивым относительно инвариантного множества Ω, если $x(t) \subset \Omega$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ при $-\infty < t < \infty$, когда $y(t) \subset \Omega$, $|x(t_0) - y(t_0)| < \delta$ для некоторого t_0.

Доказано (Hartman P., Wintner A., Amer. J. Math. 1943, 65, 273—278), что если Ω есть замыкание $x(t)$ компактно, то $x(t)$ B-устойчиво относительно Ω тогда и только тогда, когда $x(t)$ почти периодично.

A-устойчивости для почти периодичности недостаточно. Однако имеют место следующие три утверждения, справедливые также для почти периодических решений: 1. Пусть Ω — компактное инвариантное множество конечной положительной меры и $\sum_{k=1}^{n} \partial f_k/\partial x_k = 0$ (это влечет инвариантность меры; здесь $f_k(x_1, \ldots, x_n)$ — правые части данной системы). Пусть множество $\Omega \cap \Sigma_x$ имеет положительную меру для любой точки $x \in \Omega$ и любой ее сферической окрестности Σ_x. Если $x(t)$ A-устойчиво относительно Ω и t_0 произвольно, то существует такая последовательность t_n, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, что $t_n \to \infty$ или $-\infty$ соответственно при $n \to \infty$ или $-\infty$ и $x(t_n) \to x(t_0)$ при $|n| \to \infty$.

2. Пусть Ω удовлетворяет тем же условиям и $g(x)$ есть непрерывная функция на Ω. Если $x(t)$ A-устойчиво относительно Ω, то существует

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T g(x(t))\, dt.$$

3. Если Ω удовлетворяет тем же условиям и $x(t)$ A-устойчиво относительно Ω, то $x(t)$ имеет функцию распределения (вероятность для точки $x(t)$ находиться в некотором множестве). И. Н. Врублевская

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3199. Уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. 1. Элементарное решение. Мальгранж (Équations aux dérivées partielles à coefficients constants. 1. Solution élémentaire. Malgrange Bernard), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 25, 1620—1622 (франц.)

Пусть $S(a, b)$ (a, b — действительные, $a < b$) — пространство, состоящее из функций $\varphi(x), x = (x_1, \ldots, x_m)$, таких, что при $a < c < b$, $e^{cx_1}\varphi(x) \in S$ (в обозначениях Гельфанда и Шилова, Успехи матем. наук, 1953, 8, № 6, 3—54); топология в $S(a, b)$ определяется условием: $\varphi_n \to 0$ в $S(a, b)$, если $e^{cx_1}\varphi_n \to 0$ в S.

$$T = \frac{1}{(-2\pi i)^n} \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \delta + T_1 * \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_1^{n-1}} \delta + \ldots + T_n,$$

где δ — дельта-функция, $T_1, \ldots, T_n$ — обобщенные функции, несущие множества которых компактны; $*$ — операция свертки двух обобщенных функций, кроме того, $T_1 * x_1 = 0, \ldots, T_n * x_1 = 0$. Доказываются предложения: 1. Отображение $\varphi \to T * \varphi$ пространства $S(a, b)$ в $S(a, b)$ имеет непрерывное обратное отображение. 2. Если V — линейный непрерывный на $S(a, b)$ функционал, то существует хотя бы один линейный непрерывный на $S(a, b)$ функционал U такой, что $T * U = V$. Преобразованием аргументов к этому виду может быть приведено дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами); в частности, при $V = \delta$ U есть элементарное решение. Я. Б. Лопатинский

3200. Оценка области регулярности характеристического коноида. Шаркий (Evaluation du domaine de régularité du conoïde caractéristique. Szarski Jacek), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. math. Pologne), 1953, **24**, № 2, 85—110 (франц.)

Дано линейное уравнение второго порядка гиперболического типа

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}(x_1, \ldots, x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}), \quad (1)$$

коэффициенты которого и их частные производные до второго порядка включительно непрерывны и в окрестности начала координат $\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{1/2} < R$ по модулю не превосходят некоторой положительной постоянной M. Положительные числа Q и N удовлетворяют неравенству, справедливому в той же окрестности:

$$Q < \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}(x_i, \ldots, x_m)\lambda_i\lambda_k < N, \quad \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^2 = 1.$$

Автор рассматривает характеристический коноид, образованный из бихарактеристик уравнения (1), выходящих из начала координат. Можно ограничиться половиной коноида, соответствующей положительным значениям параметра $t \geqslant 0$. Для $t \leqslant 0$ результаты аналогичны. Доказывается, что часть характеристического коноида, где $t \geqslant 0$, лежащая в окрестности вершины $(0, 0, \ldots, 0)$, может быть задана уравнением

$$x_m = \varphi(x_1, \ldots, x_{m-1}), \quad (2)$$

где правые части — непрерывные функции в окрестности $\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 < \delta^2$. Существенно, что δ зависит только от R, M, N, Q, m и может быть явно через них выражено (довольно сложными формулами). Дана оценка снизу высоты области коноида, представленной уравнением (2), а именно: вдоль каждой бихарактеристики координата x_m достигает в этой области верхней грани, не меньшей некоторой константы, выраженной явно через R, M, N, Q, m. Далее автор применяет полученные результаты к общему уравнению гиперболического типа

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{i,k}(x_1, \ldots, x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}). \quad (3)$$

Для этого достаточно применить неособенное преобразование, приводящее (3) к виду (1). Даются оценки величины области, в которой приведение возможно; числа R, M, N, Q, m для преобразованного уравнения в явном виде выражаются через константы, характеризующие коэффициенты уравнения (3), и через корни его характеристического уравнения.

Результаты работы получены при помощи достаточно кропотливых выкладок. В доказательстве существенную роль играет решение некоторой системы дифференциальных неравенств, а также теорема Важевского об области существования неявных функций (Ważewski T., Ann. Soc. polon. math., 1947, 20, 89). A. Bielecki

3201. О приведении системы дифференциальных уравнений к пассивной форме. Берман С. Д., Уч. зап. Львовск. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, **22**, № 5, 27—39

Рассматривается приведение системы

$$\left\{ f_\alpha\left(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_m} y_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}, \ldots\right) = 0 \right\} \quad (4)$$

к пассивной системе, если α пробегает множество любой мощности. Пусть а) $f_\alpha(u_1, u_2, \ldots)$ аналитичны в окрестности некоторой точки $(u_1^0, u_2^0, \ldots)$, б) $f_\alpha(u_1^0, u_2^0, \ldots) = 0$, в) существуют такие числа r_i, что ряд $f_\alpha(u_1, u_2, \ldots)$ для всех α сходится при $|u_i - u_i^0| < r_i$. Через $Д = (i, k_1, \ldots, k_m)$ обозначается производная $\partial^{k_1+\ldots+k_m} y_i / \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}$, $Д_1 > Д_2$, если первая из неравных нулю разностей $i^{(1)} - i^{(2)}$, $k_j^{(1)} - k_j^{(2)}$ положительна; $Д_1$ кратна $Д_2$, если $i^{(1)} - i^{(2)} = 0$, $k_j^{(1)} - k_j^{(2)} \geqslant 0$ ($j = 1, \ldots, m$). Пассивной названа конечная система вида $\partial^{k_1+\ldots+k_m} / \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m} = f$ с аналитическими в некоторой точке правыми частями, причем в правую часть

каждого уравнения входят производные меньшие, чем производные в левой части; производные в левых частях не кратны; если в левых частях встречаются производные от одного и того же y_i, то должно выполняться условие: пусть $Д_1 = (i, k_1^{(1)}, \ldots, k_m^{(1)}) = f_1$, $Д_2 = (i, k_1^{(2)}, \ldots, k_m^{(2)}) = f_2$ — уравнения с одним и тем же y_i в левых частях и $Д = (i, k_1, \ldots, k_m)$ — производная, кратная $Д_1$ и $Д_2$, тогда

$$\frac{\partial^{(k_1-k_1^{(1)})+\ldots+(k_m-k_m^{(1)})} f_1}{\partial x_1^{(k_1-k_1^{(1)})} \ldots \partial x_m^{(k_m-k_m^{(1)})}} = \frac{\partial^{(k_1-k_1^{(2)})+\ldots+(k_m-k_m^{(2)})} f_2}{\partial x_1^{(k_1-k_1^{(2)})} \ldots \partial x_m^{(k_m-k_m^{(2)})}}.$$

Точка $(u_1', u_2', \ldots)$ является дифференциальным нулем системы (1), если в ней обращаются в нуль все уравнения (1) и существуют функции $y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$, обращающие уравнения (1) в тождества в некоторой области $|x_j' - x_j| < k_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, причем u_i' $(i > m)$—значения производных

$$\partial^{k_1+\ldots+k_m} y_i / \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m} \Big|_{X_j' = u_j}.$$

Пусть R — тихоновская топологизация совокупности дифференциальных нулей (см. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, ОГИЗ — Гостехиздат, 1948).

Теорема. Для совместной системы (1), удовлетворяющей условиям а), б), в), дополнение к множеству точек, где (1) эквивалентна пассивной системе, нигде не плотно в R. З. И. Халилов

3202. Асимптотические свойства решений линейных дифференциальных уравнений. Боянич (Асимптотика решења линеарних диференцијалних једначина. Бојанић Ранко), Зб. радова. Српска АН, 1953, **35**, № 3, 213–254 (серб.; резюме франц.)

Изучается задача на собственные значения

$$\Delta u + \{\lambda - A(P)\} u = 0, \quad P \in D, \quad u|_S = 0 \qquad (1)$$

в конечной области $D \subset E_3$; S — граница D, $A(P) \geqslant 0$ имеет непрерывные производные в $D + S$. Пусть $\Phi_n(P)$ — ортонормированные собственные функции задачи (1), λ_n — соответствующие собственные значения. Доказываются асимптотические формулы $(\lambda \to +\infty)$

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(P) = \frac{1}{6\pi^2} \lambda^{3/2} + O(\lambda), \qquad (2)$$

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \mu} \Phi_n(P) \Phi_n(Q) = O(\lambda) \quad (P \neq Q). \qquad (3)$$

Доказательство получается при помощи метода Карлемана и следующей тауберовой теоремы:

Пусть $S(u)$ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном интервале и пусть интеграл $f(x) = \int_0^\infty (u + x)^{-1} \, dS(u)$ сходится для $x > 0$. Тогда из $f(x) = O(e^{-c\sqrt{x}})$ $(x \to +\infty, c > 0)$ и $S(v) - S(u) > -m$ для $u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$ следует, что для $u \to +\infty$ $S(u) = O(1)$.

Таким образом оценку остатка в формулах (2) и (3) удалось получить, оценив остаток в тауберовой теореме Харди—Литльвуда. Частный случай формул (2) и (3), соответствующий $A(P) = 0$, был изучен Авакумовичем (Avakumović, Publ. Inst. Math. de l'Acad. Serbe sci., 1952, 4, 95—96).

Примечание референта. Более общие результаты для задачи (1) получены теперь референтом (Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 2, 179—182). Относительно случая $A(P) = 0$ см. РЖМат, 1953, 753; Матем. сб. 1954, **35**, № 2, 267—316. Б. М. Левитан

3203. Об устойчивости задачи Дирихле. Могилевский Ш. И., Уч. зап. Калининск. пед. ин-та, 1953, **16**, 73—118

Рассматривается область D трехмерного пространства, граница Γ которой ограничена. Пусть E — ограниченное множество типа F_σ, не имеющее общих точек с D; $\{F_n\}$ — последовательность замкнутых множеств, $F_n \subset F_{n+1} \subset E$, таких, что $\lim_{n\to\infty} F_n = E$; $f(Q)$, $Q \in \Gamma$ — непрерывная на Γ функция и $\varphi(P)$ — ее непрерывное продолжение на все пространство; $V_{n\varphi}(P)$ — обобщенное (в смысле Винера) решение задачи Дирихле для области, дополнительной к F_n с граничным значением $\varphi(P)$. Доказывается, что последовательность $V_{n,\varphi}$ сходится к гармонической функции $V_{f,\varphi}(P)$ в области, дополнительной к замыканию E. Задача Дирихле называется устойчивой в D относительно множества E, если $V_{f,\varphi}(P)$ не зависит от выбора F_n и $\varphi(P)$ и для всякой непрерывной $f(Q)$ совпадает с обобщенным решением задачи Дирихле для D с граничным условием $f(Q)$. Точка $Q_0 \in \Gamma$ называется точкой устойчивости задачи Дирихле относительно множества E, если $\lim_{P\to Q_0} V_{f,\varphi}(P) = f(Q_0)$ для любой непрерывной $f(Q)$. (Определение введено П. П. Коровкиным, Докл. АН СССР, 1948, **18**, № 5, 781—784). Автор доказывает ряд теорем, являющихся главным образом обобщением теорем М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева и М. Инуэ об устойчивости задачи Дирихле (Келдыш, Усп. матем. наук, 1941, 8, 171—231; Inoue, Proc. Imp. Acad. Jap., 1938, **14**, 273—277) на устойчивость той же задачи относительно множества E типа F_σ.

Опечатки и одинаковые обозначения для различных понятий затрудняют чтение. Х. Л. Смолицкий

3204. О принципе Дирихле. Шиффман (On Dirichlet's principle. Shiffman Max), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 49—53 (англ.)

Рассматривается вопрос о существовании отображения $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ внешности B простой замкнутой достаточно гладкой кривой B^* на внешность отрезка оси φ, которое в B удовлетворяет системе уравнений с частными производными

$$G'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\varphi_x = \psi_y, \quad G'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\varphi_y = -\psi_x. \qquad (1)$$

Задача соответствует задаче обтекания заданного профиля B^* плоским безвихревым потоком идеального газа, причем функция G' определяется уравнением состояния этого газа. Предполагается, что газовый поток всюду дозвуковой, т. е. рассматриваются лишь такие решения системы (1), для которых она всюду эллиптична; предполагается, что последнее условие выполняется, если $\psi_x^2 + \psi_y^2 \leqslant b_0^2$, где b_0 — некоторая постоянная. Кроме того, $\lim \psi_x = 0$, $\lim \psi_y = q$ при $(x, y) \to \infty$.

Автор использует принцип Дирихле, рассматривая дифференциальное уравнение второго порядка, которое получается исключением из (1) функции $\varphi(x, y)$, как уравнение Эйлера для некоторого функционала $\iint g(\psi_x^2 + \psi_y^2)\, dx\, dy$. Фиксируя $\varepsilon > 0$, автор выбирает $b_1 = b_0\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ и строит функцию $h(\psi_x^2 + \psi_y^2)$, совпадающую с g при $\psi_x^2 + \psi_y^2 \leqslant b_1^2$, для больших значений аргумента равную $\alpha + \beta(\psi_x^2 + \psi_y^2)$, где α и β — постоянные, выпуклую и достаточно гладкую. Тогда задача сводится к отысканию функции $\psi(x, y)$, реализующей минимум интеграла

$$\iint_B h\,(\psi_x^2+\psi_y^2)-h\,(q_0^2)-2q_0h'\,(q_0^2)\,(\psi_y-q_0)\}\,dxdy$$

реди всех функций, непрерывных в B, исчезающих на *, имеющих кусочно-непрерывные первые производные, и для которых

$$\iint_B \{\psi_x^2+(\psi_y-q_0)^2\}\,dxdy<\infty.$$

Доказано существование постоянной $\overline{q_0}$ такой, что для всех q_0, $0<q_0<\overline{q_0}$, существует обтекающий B^* озвуковой газовый поток, для которого $\psi_x=0$, $\psi_y=q_0$ бесконечности, и функция $\varphi(x, y)$ однозначна. Рассматриваются также изменения, которые надо внести в адачу в случае обтекания с циркуляцией. Б. В. Шабат

3205. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Лопатинский Я. Б., Укр. матем. ж., 1953, 5, № 2, 123—151

Для эллиптической системы дифференциальных уравнений рассматривается краевая задача, в которой на ранице задаются значения дифференциальных операторов от решения. Дается явный вид решения для олупространства при постоянных коэффициентах системы и краевых условий. Для произвольной области D систем с переменными коэффициентами соответствующая краевая задача сводится к системе регулярных интегральных уравнений. Окончательный результат: пусть

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \qquad (1)$$

— эллиптическая система p уравнений, $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного пространства, $u(x)=(u_1, \ldots, u_n)$ — вектор, $A(x, \alpha)=A(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — квадратная матрица p-го порядка, ее элементы — многочлены не выше s-й степени от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, коэффициенты которых — достаточно гладкие комплекснозначные функции в некоторой области D. $A_0(x, \alpha)$ — матрица, составленная из членов $A(x, \alpha)$, имеющих наивысшую степень s. Для каждого $x\in D$ и произвольных ненулевых действительных n-мерных векторов τ, ν, $(\tau, \nu)=0$, уравнение $\det A_0(x, \tau+\lambda\nu)=0$ имеет недействительные корни λ. Пусть V — конечная выпуклая область ($\overline{V}\in D$) с границей S, удовлетворяющей условиям Ляпунова. $B(x, \alpha)$ — матрица, имеющая $^1/_2\,ps$ строк и p столбцов. Элементы k-й строки — многочлены степени s_k от α, непрерывно зависящие от x, $0\leqslant s_k<s$, $B_0(x, \alpha)$ — матрица, k-я строка которой состоит из членов порядка s_k соответствующей строки $B(x, \alpha)$. В V ищется s раз непрерывно дифференцируемое решение системы (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to y} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=f(y),$$

где $x\in V$, $y\in S$, $f(y)$ непрерывна на S. При достаточной дифференцируемости коэффициентов уравнений, граничных условий, функции $f(y)$ и самих уравнений границы задача сводится к системе регулярных интегральных уравнений; предполагается также, что для каждой точки $y\in S$ и ненулевого действительного τ, касательного к S в точке y, ранг матрицы

$$\int_+ B_0(y, \tau+\lambda\nu(y))\,A_0^{-1}(y, \tau+\lambda\nu(y))\,(E, \ldots, \lambda^{s-1}E)\,d\lambda$$

равен $^1/_2ps$. $\left(\int_+\right.$ означает интегрирование по положительно ориентированному простому пути, лежащему в верхней λ-полуплоскости и охватывающему все лежащие в этой полуплоскости корни уравнения $\det A_0(y, \tau+\lambda\nu(y))=0$). Можно выбрать такие столбцы этой матрицы, что соответствующий минор порядка $^1/_2\,ps$ отличен от нуля при всех y и τ. З. Я. Шапиро

3206. Общие граничные задачи для систем эллиптических дифференциальных уравнений; сведение их к одному классу сингулярных интегральных уравнений, исследованных Ф. Нетером. Ниче, Ниче (Allgemeine Randwertprobleme für Systeme elliptischer Differentialgleichungen; die Zurückführung auf eine von F. Noether Untersuchte Klasse singulärer Integralgleichungen. Nitsche Joachim. Nitsche Johannes), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, **2**, № 1, 40—45 (нем.)

Ищется регулярное решение уравнения

$$\Delta\varphi+p\varphi_x+q\varphi_y+r\varphi=0 \qquad (1)$$

в области T плоскости x, y при граничном условии на контуре S:

$$-a(s)\frac{\partial\varphi}{\partial n}+b(s)\frac{\partial\varphi}{\partial s}+c(s)\,\varphi=\pi f(s), \qquad (2)$$

где a, b, c — непрерывные функции дуги s контура. Решение представляется в виде

$$\varphi(x, y)=\int_S \psi(t)\,\Gamma(t, x, y)\,dt,$$

где Γ — фундаментальное решение (1), причем для ψ получается сингулярное интегральное уравнение

$$a(s)\,\psi(s)+\int K(s, t)\,\psi(t)\,dt=f(s),$$

где $K(s, t)=\frac{b(s)}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}+A(s, t)$. Применяя теоремы Нетера (Noether F., Math. Ann., 1920, **81**, 42—63), авторы доказывают, что если индекс Коши n функции $a(s)-ib(s)$ положителен, то однородная задача, соответствующая задаче (2), имеет по крайней мере $2n$ линейно независимых решений. Если $n<0$, то неоднородная задача имеет решение, если $f(s)$ удовлетворяет $p\geqslant 2\,|\,n\,|$ интегральным условиям.

Далее рассматривается система эллиптических дифференциальных уравнений вида

$$u_x-v_y=0,\quad u_y+v_x+\mu_u+\lambda v=0, \qquad (3)$$

с граничным условием

$$au+bv=\pi f(s). \qquad (4)$$

Примечание референта. Обе задачи в настоящее время изучены полнее. Задача (2) для уравнения типа (1) с аналитическими коэффициентами решена Б. В. Хведелидзе (Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1943, **12**, 47—77). Задача (4) для системы типа (3) с произвольными непрерывными коэффициентами решена И. Н. Векуа (Матем. сб., 1952, **31**, № 2, 217—314; РЖМат, 1954, 3702). Н. П. Векуа

3207. Область применимости метода отражений. Келлер (The scope of the image method. Keller Joseph B.), Communs Pure and Appl. Math., 1953, **6**, № 4, 505—512 (англ.)

В области D n-мерного евклидова пространства, ограниченной плоскостями, рассматривается линейный дифференциальный оператор L второго порядка; на каждом из ограничивающих D кусков плоскостей задается краевое условие одного из 3 видов:

$$u=0, \qquad (1)$$

$$du/dn=0, \qquad (2)$$

$$du/dn+hu=0 \qquad (3)$$

($h = \text{const}$; на разных кусках условия могут быть различными). Для $n = 2, 3$ определяются все те области D, для которых функция Грина $G(r, r')$ может быть в случае граничных условий (1), (2) представлена в виде

$$G(r, r') = \sum_{r''} \pm G^*(r'', r');$$

суммирование распространяется на все точки r'', полученные из r последовательными отражениями от ограничивающих плоскостей; $G^*(r, r')$ — функция Грина оператора L для всего пространства. Подобный же вопрос решен также и при граничных условиях (3) (представление функции Грина в этом случае более сложно). Указаны ограничения, которые необходимо при этом наложить на L. Вопрос сходимости подобных представлений не рассматривается. Я. Б. Лопатинский

3208. **О системах эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с n независимыми переменными. Миранда** (Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine, in n variabili indipendenti. Miranda Carlo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 156—160 (итал.)

Рассматривается задача об интегрировании в области T системы уравнений вида

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial u_{ih}}{\partial x_h} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} + f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (1)$$

при заданных граничных условиях для $v : v|_{FT} = \overline{v}$; u_{ih} — компоненты кососимметрического тензора, квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k$ — положительно определенная. При условии, что функция $\overline{v}$ удовлетворяет условию Гельдера на FT и при некоторых условиях на коэффициенты системы a_{ik} и f_i доказывается существование и единственность (в известном смысле) решения задачи. Сначала автор строит функцию v. Для этого он аппроксимирует коэффициенты a_{ik} и f_i последовательностями многочленов $\{a_{ik}^{(m)}\}$, $\{f_i^{(m)}\}$ и решает эллиптическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_k} \right) + f_i^{(m)} = 0 \qquad (2)$$

при том же граничном условии $v^{(m)}|_{FT} = \overline{v}$, а затем, зная $v^{(m)}$, определяет u_{ih} из (1). Приводятся оценки семейства $v^{(m)}$, из которых вытекает компактность этого семейства. При помощи предельного перехода автор получает v, по которому строится u_{ih}.

Подробные доказательства теорем отсутствуют. М. И. Вишик

3209. **Замечания о самосопряженных дифференциальных операторах. Хамбургер** (Remarks on self-adjoint differential operators. Hamburger Hans Ludwig), Proc. London Math. Soc., 1953, **3**, № 12, 446—463 (англ.)

Пусть $\varphi(x) \in G_m \subset L_2(a, b)$, если $\varphi^{(k)}(x)$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ абсолютно непрерывна, а $\varphi^{(m)}(x) \in L_2(a, b)$; пусть далее $\varphi(x) \in D$, если $\varphi(x) \in G_m$ и $\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b) = 0$. Автор называет оператор

$$L(u) \equiv \sum_{k=0}^{m} p_k(x)\, u^{(k)}(x)$$

(SL)-оператором, если

$$\int_a^b (\overline{vL}(u) - u\overline{L(v)})\, dx = 0$$

для всех $u(x) \in D$ и $v(x) \in G_{(m)}$, причем от комплексных коэффициентов $p_k(x)$ требуется лишь принадлежность $L_2(a, b)$.

Теорема. Пусть $|p_m(x)| > \varepsilon_0$, $p_k(x) \in L_2$, $0 \leqslant k \leqslant m$ для $a \leqslant x \leqslant b$, оператор L является (SL)-оператором тогда и только тогда, если для любой фундаментальной системы решений $\{u_k(x)\}$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ уравнения $L(u) = 0$ существует постоянная эрмитова кососимметрическая матрица $\|a_{i,k}\|$ с отличным от нуля детерминантом такая, что для

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j} \overline{u_j(x)}\, u_i^{(k)}(x) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant m-2$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j} \overline{u_j(x)}\, u_i^{m-1}(x) = 1 \,/\, p_m(x).$$

Далее отдельно исследуются вещественные (SL)-операторы в случае четного и нечетного m. Изучается также связь между самосопряженными расширениями L и порождающими их граничными условиями.

Р. А. Александрян

3210. **Об одном свойстве разложения Алманси полигармонической функции. Телеман** (O proprietate a funcţiilor din desvoltarea Almansi a unei funcţii poliarmonice. Teleman S.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române. Sec. mat., şi fiz., 1953, **5**, № 3, 385—391 (рум.; резюме русс., франц.)

Рассматривается разложение Алманси полигармонической функции порядка p

$$F(M) = F_1(M) + r^2 F_2(M) + \cdots + r^{2(p-1)} F_p(M), \qquad (1)$$

где $M \in D$, D — область n-мерного пространства, $r = \overline{MM_0}$, F_i — гармонические функции точки M. (Подробное определение см. Nicolesco M., Ann. scient. Ecole norm. supér., 1935, **52**, 183—220). В разложении фиксируется точка $M_0 \in D$. Изучаются свойства коэффициентов F_i разложения (1) как функций точки M_0. Доказывается, что F_i — полигармонические функции M_0 порядка $p - i + 1$ соответственно. Б. В. Боярский

3211. **Некоторые свойства интегралов одного класса сингулярных уравнений в областях определенного вида. Брусс** (Quelques propriétés des intégrales d'une classe d'équations singulières dans certains domaines. Brousse Pierre), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 22, 1381—1383 (франц.)

Пусть D — полукруг, лежащий в полуплоскости $y \geqslant 0$, диаметром которого является отрезок AB оси $y = 0$, а $\psi(\theta)$ $(0 < \theta < \pi)$ — заданная на полуокружности Γ этого круга кусочно-непрерывная функция с конечным числом точек разрыва первого рода E_i; $\psi(\theta)(\sin\theta)^{k+1} = 0$ при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$.

Приводится формула, дающая решение $S(M)$ уравнения

$$y(u_{xx} + u_{yy}) + (k+2)\, u_y = 0, \quad 0 < k = \text{const}, \qquad (1)$$

регулярное в области D, ограниченное в точках A и B, принимающее на Γ значения ψ в точках непрерывности ψ и такое, что $S(M) \lg E_i M = 0$ при $E_i = M$, $S(M)\, y^{k+1} = 0$ внутри AB. Из этой формулы автор выводит условия единственности решения уравнения (1) в области $y > 0$.

Устанавливается ряд свойств решений уравнения

$$y(u_{xx} + u_{yy}) - k u_y = 0$$

в областях специального вида. А. В. Бицадзе

3212. **Принцип экстремума для одного класса гиперболических уравнений и его применения к уравнениям смешанного эллиптико-гиперболического типа. Агмон, Ниренберг, Протгер** (A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type. Agmon S., Nirenberg L., Protter

M. H.), Communs Pure and Appl. Math., 1953, **6**, № 4, 455—470 (англ.)

Установлены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты линейного уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными для того, чтобы имел место принцип экстремума в гиперболической области или в области, где это уравнение смешанного типа.

Референтом было замечено, что решение $u(x, y)$, задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева

$$u_{xx} + u_{yy} \operatorname{sgn} y = 0$$

в случае, когда $u = 0$ на характеристике, достигает экстремума только на эллиптической части границы области. На основании этого была установлена единственность решения задачи Трикоми (Докл. АН СССР, 1950, **70**, № 4, 561—564). Такой же результат был получен для уравнения Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

(Germain P., Bader R., C. r. Acad. sci., 1951, **232**, № 6, 464). Автор получил аналогичный результат для довольно общего класса линейного уравнения второго порядка смешанного типа с двумя независимыми переменными. А. В. Бицадзе

3213. Краевая задача для нелинейного параболического уравнения с двумя переменными. Чилиберто (Su di un problema al contorno per una equazione non lineare di tipo parabolico in due variabili. Ciliberto Carlo), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 57—60 (итал.)

Доказывается существование решения нелинейного уравнения параболического типа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial y} = f(x, y, v), \qquad (1)$$

удовлетворяющего условиям

$$v(0, y) = f_0(y),\ v(a, y) = f_1(y),\ v(x, 0) = 0, \qquad (2)$$

при этом вопрос о единственности решения остается открытым. Теорема. Пусть $f_0(y)$ и $f_1(y)$ — непрерывные функции, определенные при $0 \leqslant y \leqslant b$ и удовлетворяющие условию Липшица с показателем $1/2$, причем $f_0(0) = f_1(0) = 0$, пусть, кроме того, $l(y)$ и $m(y)$ — существенно положительные функции, определенные в (a, b) и суммируемые с квадратом. Тогда, если функция $f(x, y, v)$, определенная при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b < \infty$ и любом v удовлетворяет условию Липшица относительно x, y и v и $|f(x, y, v)| \leqslant l(y)|v| + m(y)$, где $3\int_0^b l(y)\,dy < 1$, то существует решение уравнения (1), определенное и непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ и удовлетворяющее краевым условиям (2). Доказательство полностью не проведено. Л. И. Камынин

3214. К теории уравнений в частных производных. Мейман Н. Н., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 4, 593—596

Доказаны теоремы: 1) Решение разностного уравнения $L_\Delta u = 0$ при стремлении шагов сетки к нулю сходится к решению задачи Коши (или смешанной задачи с начальными и граничными условиями) для дифференциального уравнения $Lu = 0$, если решение уравнения $Lu = 0$ существует, оператор L_Δ аппроксимирует L и разностное уравнение устойчиво. 2) Задача Коши (или смешанная задача) для уравнения $Lu = 0$ имеет не более одного решения, если существует разностное уравнение $L_\Delta u = 0$, удовлетворяющее указанным выше условиям.

Принятое автором определение аппроксимации значительно уже обычного определения (например, оператор

$$L_\Delta u = \frac{1}{q\Delta t}\left[u((n+q)\Delta t, x) - u(n\Delta t, x)\right] - n\Delta t$$

при $q \geqslant 2$ не аппроксимирует оператор $Lu = \partial u/\partial t - t$), а определение устойчивости — шире обычного.

Автор указывает, что для некоторого класса уравнений требование существования решения есть следствие остальных условий теоремы (точной формулировки не дано). Даны примеры применения метода конечных разностей для доказательства теорем существования решений простейших квазилинейных уравнений. Метод автора не применим к гиперболическим уравнениям с числом независимых переменных большим двух. А. Ф. Филиппов

3215. О переходном режиме в «скин-эффекте». Цанобетти (Sul periodo transiente dello «skin effect». Zanobetti Dino), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 6, 791—795 (итал.)

Уравнение для плотности тока в проводнике

$$\frac{\partial^2 G(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G(r, t)}{\partial r} - \mu\gamma\frac{\partial G(r, t)}{\partial t} = 0$$

при начальном условии $G(r, 0) = 0$, $0 \leqslant r \leqslant a$, и краевом условии $G(0, t) \neq \infty$, $t > 0$, интегрируется методом преобразования Лапласа, который приводит к формуле

$$G = \frac{\gamma E}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{zt}\,\frac{(\omega\cos\varphi + z\sin\varphi)\,I_0(\beta a)\,dz}{(\omega^2 + z^2)\,(I_0(\beta a) + h\beta a I_1(\beta a))}$$

где $\beta^2 = \mu\gamma z$, μ и γ — магнитная проницаемость и проводимость, кроме того, э. д. с. $e(t) = E\sin(\omega t + \varphi)$. Этот интеграл вычисляется разложением в ряд, после чего выводится формула для полного тока в проводнике:

$$i(t) = 2\pi\int_0^a G(r, t)\,r\,dr. \qquad \text{В. И. Левин}$$

3216. О распределении теплоты в стержне, составленном из двух однородных частей переменной длины при линейных граничных условиях. Златев И., Докл. Болгар. АН, 1951, **4**, № 1, 5—8 (журнал вышел из печати в 1953 г.)

Рассматривается стержень, расположенный по оси OX, состоящий из частей A_1 и A_2 с концами соответственно $O_1(x = s_1(t))$, $O(x = x_0)$, $O_2(x = x_0)$, $O_2(x = s_2(t))$, где функции $s_1(t) < x_0 < s_2(t)$ имеют ограниченные производные при $t \geqslant 0$. Распределения температур $u_1(x, t)$ в A_1 и $u_2(x, t)$ в A_2 удовлетворяют уравнениям

$$a_i^2\,\partial^2 u_i/\partial x^2 = \partial u_i/\partial t \quad (i = 1, 2),$$

где $a_i^2 = k/\rho_i\sigma_i$, k_i — коэффициент теплопроводности, ρ_i — плотность, σ_i — удельная теплоемкость стержня A_i. Начальные и граничные условия:

$$u_1(x, 0) = \Phi_1(x) \qquad (s_1(0) < x < x_0),$$

$$u_2(x, 0) = \Phi_2(x) \qquad (x_0 < x < s_2(0)),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i(t)\,u_i + \beta_i(t) = 0, \quad t > 0 \text{ в } O_i, \qquad (1)$$

$$u_1 = u_2,\ k_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = k_2\frac{\partial u_2}{\partial x},\ t > 0 \text{ в } O, \qquad (2)$$

где $\Phi_i(x)$, $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ — некоторые ограниченные интегрируемые функции. Решение находится в виде:

$$u_i(x, t) = V_i(x, t) + W_i^{(1)}(x, t) + W_i^2(x, t) \quad (i = 1, 2),$$

где

$$V_i(x,\ t) = -(-1)^i/2a_i\sqrt{\pi t}\times$$

$$\times\int_{(-1)^i}^{x_0}\Phi_i(\xi)\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_i^2t}\right\}-\exp\left\{\frac{x-2x_0+\xi}{4a_i^2t}\right\}\right]d\xi,$$

$$W_i^{(i)}(x,\ t) = \int_0^t \frac{\mu_i(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{[x-s_i(\tau)]^2}{4a_i^2(t-\tau)}\right\}d\tau,\ i,j=1,2,$$

$$W_i^{(j)}(x,\ t) = \int_0^t \frac{\nu_i(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4a_i^2(t-\tau)}\right\}d\tau,\quad i\neq j,$$

μ_i, ν_i ($i=1,\ 2$) определяются из (1) и (2). Результаты автора являются обобщением результатов Дацева (Докл. АН СССР, 1947, 56, № 3, 255—258; Изв. АН СССР, сер. геофиз. 1950, 14, № 2, 113—127). Утверждается, что аналогично можно рассмотреть случай стержня, состоящего из n частей. М. К. Керимов

3217 К. Лекции об уравнениях с частными производными. Петровский И. Г. Изд. 2-е, 360 стр., М., Гостехиздат, 1953, 7 р. 20 к.

Основой книги являются лекции, прочитанные автором студентам-математикам механико-математического факультета МГУ. Во втором издании многие разделы существенно переработаны и внесен новый материал. Книга содержит 4 главы. Гл. 1. Введение. Классификация уравнений. Гл. 2. Гиперболические уравнения. Гл. 3. Эллиптические уравнения. Гл. 4. Параболические уравнения. Гл. 2 разбита на два раздела: Задача Коши в области неаналитических функций; Колебания ограниченных тел. В конце помещены, в качестве дополнения, два параграфа, посвященные методу сеток (конечных разностей).

Большое внимание уделяется теоремам существования и единственности и вопросу корректности постановок задач. При сравнительно небольшом объеме книга, кроме классических результатов, содержится много современного материала. Некоторые результаты приведены автором без доказательства. Оба раздела гл. 2, а также гл. 3 и 4 заканчиваются параграфами с обзором новых результатов. Особенно обширны эти обзорные параграфы в первом разделе гл. 2 и в гл. 3.

В гл. 1 после доказательства теоремы С. В. Ковалевской подробно излагается вопрос о единственности решения задачи Коши в области неаналитических функций. Доказывается известная теорема Гольмгрена, формулируются дальнейшие результаты Адамара, Карлемана и А. Д. Мышкиса и приводится ряд общих соображений относительно указанной задачи. В конце этой главы дано приведение к каноническому виду системы линейных уравнений с частными производными при двух независимых переменных и дается классификация систем (эллиптические, гиперболические и гиперболические в узком смысле). В гл. 2 приводится решение задачи Коши для гиперболических систем с двумя независимыми переменными. Излагается преобразование Лоренца и доказывается некорректность постановки задачи Коши для волнового уравнения, если гиперплоскость, несущая на себе начальные данные, образует малый угол с осью t. Один параграф первого раздела гл. 2 посвящен изучению различных понятий обобщенных решений. При решении задачи Коши и при обосновании метода Фурье автор приводит обобщенные решения в связи с тем, что относительно функций, входящих в начальные условия, допускаются более общие предположения, чем для классических решений. В обзорном параграфе первой части гл. 2 отмечены работы Адамара, Герглоца, С. Л. Соболева, И. Г. Петровского и др. Во втором разделе гл. 1 излагается вопрос о зависимости решения предельной задачи от начальных условий. Метод Фурье проводится главным образом для одномерного случая. Сначала получаются оценки для собственных значений и собственных функций (при помощи вариационного исчисления) и на этой основе дается для одномерного случая обоснование метода Фурье для решения, понимаемого в классическом смысле, и при возможности двукратного почленного дифференцирования ряда по t и x. Указывается на возможность обоснования метода Фурье при помощи теории интегральных уравнений (введение функции Грина). В двумерном случае изучается колебание прямоугольной и круглой мембраны. Заключительный параграф этого раздела называется «Дополнительные сведения о собственных функциях». Общего обзора о решении граничных задач нет. В гл. 3 рассматривается главным образом уравнение Лапласа. Доказательство существования решения задачи Дирихле проводится как по методу Пуанкаре — Перрона, так и при помощи интегральных уравнений. Теория потенциала излагается в двумерном случае. Подробно рассматривается задача Неймана. Обзорный параграф гл. 3 содержит в основном результаты, касающиеся более общих эллиптических уравнений (работы С. Н. Бернштейна, И. Г. Петровского, С. Л. Соболева, М. В. Келдыша, И. Н. Векуа, М. И. Вишика, О. А. Олейник, А. В. Погорелова и др.). Гл. 4 невелика по объему (13 страниц). Для уравнения теплопроводности решается при помощи метода Фурье первая краевая задача для прямоугольника и задача Коши для неограниченного теплоизолированного стержня и подробно обсуждается единственность решения. Отметим широкое применение метода сеток. Указано применение этого метода для приближенного решения задачи Коши для систем уравнений и в случае волнового уравнения. В гл. 3 имеется параграф о применении метода сеток к решению задачи Дирихле, обращено внимание на вопрос о приближенном решении соответствующей алгебраической системы. В первом параграфе дополнения методом сеток проводится решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Второй параграф дополнения содержит некоторые общие замечания о методе сеток, а также определение и исследование устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности. В. И. Смирнов

3218 К. Уравнения математической физики. Тихонов А. Н., Самарский А. А. (Учебник для физ. и физ.-матем. фак. гос. ун-тов). Изд. 2-е, испр. и дополн., 680 стр. М., Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1953, 14 р. 30 к.

По сравнению с предыдущим изданием, в текст внесены небольшие изменения и устранены опечатки и неточности. В частности, добавлен параграф о применении метода конечных разностей к уравнению теплопроводности.

Содержание книги: Гл. 1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Гл. 2. Уравнения гиперболического типа. Гл. 3. Уравнения параболического типа. Гл. 4. Уравнения эллиптического типа. Гл. 5. Распространение волн в пространстве. Гл. 6. Распространение тепла в пространстве. Гл. 7. Уравнения эллиптического типа (продолжение). Дополнение: Введение; ч. 1. Цилиндрические функции; ч. 2. Сферические функции; ч. 3. Полиномы Чебышева — Эрмита и Чебышева — Лягерра. В конце книги приведены таблицы интеграла ошибок и некоторых цилиндрических функций. Нет предметного указателя. М. К. Керимов

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

3219. Нелинейная теория частотно-модулированного колебательного контура. Гросс (Nonlinear study of frequency modulated oscillator. Gross Josef), J. Franklin Inst., 1954, **257**, № 6, 481—490 (англ.)

Задача о колебании контура, модулированного по частоте при неглубокой модуляции большой частотой, сводится приближенно (точность до членов порядка γ^2) к исследованию уравнения

$$x'' + [c + 2\gamma \sin 2z]\, x' + (1 + \gamma \cos 2z)\, x + ax'^3 = 0, \quad (1)$$

где c, a и γ — заданные числа ($\gamma \ll 1$), а x' и x'' — соответствующие производные по z.

Периодические решения (1) ищутся в форме $x = r\cos(\varphi - z)$. Для определения r и φ строятся укороченные уравнения первого приближения (см. Андронов А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 1937, стр. 435):

$$r' = [1/2 \sin 2\varphi - c/\gamma - 3ar^2/4\gamma]\,\gamma r/2, \qquad \varphi' = \cos 2\varphi \cdot \gamma/4. \quad (2)$$

Особые точки (2) и их устойчивость определяют предельные циклы (1) и их устойчивость. Полученные результаты сравниваются с результатами, получающимися при решении аналогичной задачи без модуляции ($\gamma = 0$).

М. А. Айзерман

3220. Эффект затягивания в синхронизируемых системах. Елонек, Селинский, Сиский (Pulling effect in synchronized systems. Jelonek Z., Celinski O., Syski R.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1954, **101**, № 6, part 4, 108—117 (англ.)

Показывается, что в ряде случаев процесс установления периодического режима в автоколебательной системе, подверженной внешнему периодическому воздействию, может быть описан уравнением

$$T\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + \cos\varphi = M \cdot 1,$$

где T и M — положительные числа, 1 — единичная функция Хевисайда, а $\varphi(t)$ — фаза, переменная в процессе установления колебаний. На фазовом цилиндре устойчивая особая точка этого уравнения соответствует установившемуся периодическому режиму (т. е. захватыванию автоколебаний на частоте возмущающей силы), а предельный цикл, охватывающий цилиндр — почти периодическому движению.

Периодический режим может возникать (система входит в синхронизм) или нарушаться (система выходит из синхронизма) при изменении параметров. При этом бифуркационные значения параметров зависят от направления, в котором они изменяются: система входит в синхронизм или выходит из него при разных значениях параметра, в зависимости от того, увеличивается он или уменьшается (явление «затягивания»). Автор поясняет явление затягивания на фазовом цилиндре: для того чтобы система вошла в синхронизм, параметры должны быть изменены так, чтобы на фазовом цилиндре не было предельного цикла, охватывающего цилиндр; при обратном изменении параметров выход системы из синхронизма связан не с появлением вновь этого цикла, а со сменой устойчивости особой точки. Естественно, что входу в синхронизм и выходу из синхронизма соответствуют разные участки на бифуркационной границе в пространстве параметров. Вводится в рассмотрение функция затягивания, представляющая собой соотношение между параметрами T и M, определяющее условие исчезновения предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр. Для больших T и малых M автор предлагает приближенную формулу для определения функции затягивания. Эта формула сравнивается с точными значениями, полученными построением траекторий при помощи изоклин и метода Льенара. Приводится принципиальная схема экспериментальной установки и результатов экспериментов, которые сравниваются с результатами теоретического исследования.

М. А. Айзерман

3221. К устойчивости регуляторов с запаздыванием. Хан (Zur Stabilität von Reglern mit Nachlaufzeit. Hahn Wolfgang), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 8/9, 316 (нем.)

Условием устойчивости систем регулирования с запаздыванием, описывающихся линейным дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом

$$\ddot{Y}(t) + 2k\dot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) - aY(t-\tau) = 0, \quad (1)$$

является отрицательность действительных частей всех корней λ_i трансцендентного характеристического уравнения

$$A(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 - ae^{-\lambda\tau} = 0.$$

Автор указывает, что в соответствующей литературе необходимость и достаточность этого условия строго не обоснованы. Нужно показать, что каждое решение (1) допускает представление в виде ряда $\sum C_i e^{\lambda_i t}$ и что этот ряд сходится на всей положительной оси t. Кратко намечен путь доказательства. Отмечена возможность перенесения доказательства на подобные уравнения более высокого порядка. Эти вопросы рассматривались ранее в работе Ю. И. Неймарка (Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1950, № 16, 191) и книге А. Д. Мышкиса (Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, ГИТТЛ, 1951, стр. 245). Библиографию см. в статье А. Д. Мышкиса (Успехи матем. наук, 1945, 4, № 5, 99).

Я. З. Цыпкин

3222. Распределение собственных значений дифференциального уравнения сфероидальных функций. Мейкснер, Шефке (Eigenwertkarten der Sphäroiddifferentialgleichung. Meixner Josef, Schäfke Friedrich Wilhelm), Arch. Math., 1954, **5**, № 4—6, 492—505 (нем.)

Рассматривается уравнение

$$[(1-z^2)\,y'(z)]' + [-\mu^2/(1-z^2) + \lambda + \gamma^2(1-z^2)]\,y(z) = 0 \quad (1)$$

с параметрами λ, γ^2, μ^2. (Это уравнение возникает при решении методом разделения переменных уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ в эллипсоиде вращения (Стретт М. Д. О., Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, ГНТИ, Укр., 1935). Ссылаясь на свою работу (Grundl. math. Wiss. Berlin — Göttingen — Heidelberg. Bd. 71, 1954), авторы отмечают, что существует нетривиальное решение $y(z)$ уравнения (1), которое при положительном полуобходе обеих особенностей $z = \pm 1$ удовлетворяет соотношению $y(ze^{\pi i}) = e^{\pi i\nu}\, y(z)$. Характеристический показатель ν определяется с точностью до слагаемого $2k$ (k — целое) и до замены ν на $-\nu - 1$; $\sin \pi\nu$ — целая функция параметров λ, γ^2, μ^2. Изучаются кривые $\nu = \text{const}$ в (λ, γ^2)-плоскости при фиксированном μ. В дополнение к результатам цитированной выше работы приводятся сведения о поведении этих кривых при $\nu \equiv \pm\mu \pmod 1$ (в частности, при μ близких к 1) и при $\nu \equiv 1/2 \pmod 1$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$. В последнем случае даны указания относительно метода расчета. Приведены графики кривых для ряда значений μ и ν.

М. Ш. Бирман

3223. О траекториях парного соударения в задаче трех тел, взаимодействующих с силами, пропорциональными логарифмам взаимных расстояний. Склянский А. Л., Укр. матем. ж., 1954, **6**, № 3, 349 — 362

Исследуются траектории парного соударения при пространственном движении трех материальных точек

с массами m_0, m_1, m_2, взаимно притягивающихся или отталкивающихся с силами, равными по модулю

$$g^2 m_i m_j |\ln r_k/a| \qquad (i,\ j,\ k=0,1,2;\ i\neq j\neq k), \qquad (1)$$

где r_k — взаимное расстояние точек P_i, P_j, а g^2 и a — положительные постоянные. Закон (1) рассматривался при исследовании прямолинейного движения референтом (Укр. матем. ж., 1950, 2, № 4). В предположении, что до момента t_1 движение происходит регулярно, а при $t\to t_1$, $r_2=r\to+0$, исследуется поведение функций, характеризующих движение, в окрестности момента парного соударения. При этом разграничиваются два случая $\lim\limits_{t\to t_1} dr/dt=r_1<0$ и $\lim\limits_{t\to t_1} dr/dt=0$. Используя методы цитированной статьи, посредством ряда специальных подстановок автор приводит уравнения движения к виду, ранее рассматривавшемуся Болем, Коттоном, Шази и др. На основании нескольких обобщений известных теорем Боля — Коттона делается заключение о существовании семейства решений исследуемой системы дифференциальных уравнений, соответствующего парному соударению точек в некоторый конечный момент. Ю. Д. Соколов

3224. Волновые движения в упруго-пластических нитях. К р а г с (Wave motion in plastic-elastic strings. C r a g g s J. W.), J. Mech. and Phys., Solids, 1954, 2, № 4, 286—295 (англ.)

Для нити с известными упругими свойствами рассматривается задача о поперечных колебаниях с большой амплитудой, при которых натяжение нельзя считать постоянным. В начальном состоянии нить не растянута, имеет прямолинейную форму и лежит вдоль оси ox. Методом характеристик строится решение для известных уравнений движения в переменных Лагранжа

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}(T\cos\psi),\quad m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}(T\sin\psi),$$

где u и v — компоненты смещения, а ψ — угол наклона нити к оси ox в растянутом состоянии.

Для нити конечной длины с закрепленными концами $x=\pm L$ рассмотрено взаимодействие продольной и поперечной волн в случае, когда середина нити мгновенно приводится в движение с постоянной скоростью в направлении оси oy.

Методом конечных разностей решается задача для упруго-пластической нити с упрочнением. А. С. Петров

3225. Дальнейшие замечания, касающиеся интегральных преобразований волнового уравнения. Х и с л е т, Л о м а к с (Further remarks concerning integral transforms of the wave equation. H e a s l e t M a x A., L o m a x H a r v a r d), J. Aeronaut. Sci., 1954, 21, № 2, 142 (англ.)

Поясняется физический смысл членов, появляющихся при интегральных преобразованиях линеаризованного уравнения установившегося сверхзвукового потока

$$\partial^2\varphi/\partial x^2-\partial^2\varphi/\partial y^2-\partial^2\varphi/\partial z^2=0, \qquad (1)$$

где φ — потенциал возмущения скорости.

При преобразовании

$$\bar\varphi(s,y,z)=\int_{f_0(y,z)}^{\infty} e^{-sx}\varphi(x,\ y,\ z)\,dx$$

это уравнение принимает вид:

$$s^2\bar\varphi-\frac{\partial^2\bar\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\bar\varphi}{\partial z^2}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n} e^{-sf_i}\left[\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial f_i}{\partial y}\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial f_i}{\partial z}\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{x=f_i} \qquad (2)$$

где $x=f_i(y,\ z)$ — поверхности разрыва в потоке, а символ Δ означает скачок соответствующей функции на f_i. Принимается, что $\Delta\varphi=0$.

Рассматривая в качестве поверхностей разрыва характеристические поверхности уравнения (1), автор отмечает, что в этом случае величины, стоящие в квадратных скобках правой части (2), суть направленные производные от $\Delta\varphi$ вдоль этих поверхностей. Они представляют собой добавок к тангенциальным скоростям и потому из физических соображений их можно считать равными нулю. В случае линеаризованных уравнений они исчезают вследствие предположенной непрерывности φ.

Аналогичное рассмотрение проводится для волнового уравнения

$$\partial^2\varphi/\partial x^2+\partial^2\varphi/\partial y^2+\partial^2\varphi/\partial z^2-\partial^2\varphi/\partial t^2=0 \qquad (3)$$

в присутствии плоского крыла, параллельного оси y. Вводя функцию

$$\bar\varphi(x,\ z,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\ y,\ z,\ t)\,dy$$

и подставляя ее в (3), автор указывает, что $\bar\varphi$ удовлетворяет уравнению

$$\partial^2\bar\varphi/\partial x^2+\partial^2\bar\varphi/\partial z^2-\partial^2\bar\varphi/\partial t^2=0.$$

Ю. Н. Днестровский

3226. Отражение звуковых волн конечной амплитуды от жесткой стены. К о п с о н (The reflexion of sound waves of finite amplitude by a rigid wall. C o p s o n E. T.), Proc. Roy. Soc., 1954, A222, № 1149, 254—261 (англ.)

Политропный газ, заполняющий полупространство $x>0$ ($x=0$ — жесткая стена), в момент $t=0$ имеет заданную, зависящую только от x, плотность. Если плотность возрастает с расстоянием от стены, то при $t>0$ в результате отражения от стены возникнет ударная волна. Производится расчет этой ударной волны в предположении, что $p=A\rho^{5/3}$, а ρ при $t=0$ пропорционально $x^{2/3}$. Нелинейные уравнения движения и неразрывности приводятся к линейным введениям в качестве искомых функций x и t от переменных s и r, где $u=r-s$, $3c=r+s$ ($c^2=dp/d\rho$), и используются условия непрерывности потока вещества, количества движения и энергии на фронте ударной волны (при этом учитывается, что коэффициент A, зависящий от энтропии, различен по разные стороны от фронта ударной волны). Оказывается, что уравнением движения фронта ударной волны в рассматриваемом случае будет $x=\xi(t)=(k^2-1/3)\mu t^2$, где $k^2=0{,}401830$ (корень некоторого алгебраического уравнения), а μ — коэффициент пропорциональности, входящий в выражение плотности $\rho=(3/5A)^{3/2}c^3=(8/27)(3/5A)^{3/2}(\mu x)^{2/3}$ при $t=0$. Вычисляются также (как функции времени) значения c, ρ и p по обе стороны фронта ударной волны.

Полученное разрывное решение задачи не является, вообще говоря, единственным, так как из начала координат в первом квадранте плоскости $x,\ t$ можно провести более одной линии $x=\xi(t)$ разрыва и строить решения, удовлетворяющие краевым условиям на положительных полуосях x и t, условиям Гюгонио на линиях разрыва и непрерывные между ними. В. И. Левин

3227. Теория малых вибраций в сверхзвуковом потоке крыла самолета любой формы в плане. Д ж о н с (Supersonic theory for oscillating wings of any plan form. J o n e s W. P.), Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1953, № 2655, 11 pp. (англ.)

Для функции Φ, связанной с амплитудой потенциала скоростей малых вибраций тонкого крыла, выводится волновое уравнение

$$L(\Phi)\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial Z^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}-k^2\Phi=0,$$

где $k = \lambda \sec \mu$, λ — частота вибраций, μ — отношение скорости невозмущенного потока к скорости звука. Краевые условия: $\Phi = 0$ на фронте волны, $\partial\Phi/\partial Z$ задано на крыле. Для решения этой задачи используется идея метода Римана — Вольтерра, основным является соотношение:

$$\int_V [\Psi L(\Phi) - \Phi L(\Psi)]\, d\tau = \int_S \left[\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right] dS,$$

(обобщенная теорема Грина). В качестве частных решений уравнения, обращающихся в нуль на характеристическом конусе, находятся функции

$$\Psi_1 = q^{-1} \sin q \cdot \ln(\Theta + \sqrt{\Theta^2 - 1}),$$

$$\Psi_2 = -\frac{x}{q}\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\sin q}{q}\right)\right][\ln(\Theta + \sqrt{\Theta^2 - 1}) - \sqrt{\Theta - 1}/\Theta],$$

где $q^2 = k^2(x^2 - y^2 - z^2)$, $\Theta = x/\sqrt{y^2 + z^2}$, $x = X_0 - X$, $y = Y_0 - Y$, $z = Z_0 - Z$. В. И. Левин

3228. Некоторые вопросы теории теплопроводности анизотропных твердых тел. Мицкевич Н. В., Ж. эксперим. и теор. физики, 1954, **26**, № 5, 557—562

Исследовано уравнение теплопроводности, записанное в тензорном виде,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x_1, x_2, x_3, t), \quad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (1)$$

($a_{ij} = k_{ij}/c\rho$ — тензор температуропроводности, c — теплоемкость, ρ — плотность тела, k_{ij} — тензор теплопроводности) при граничных условиях 1-го, 2-го и 3-го рода.

Методом разделения переменных находятся решения задачи для анизотропных тел конкретной формы: для прямоугольного параллелепипеда решение получено в виде

$$u = \sum_{l_1 l_2 l_3}^{\infty} C_{l_1 l_2 l_3} \sin x_1 n_1 \sin x_2 n_2 \sin x_3 n_3 \exp\{-a_{ik} n_i n_k t\}.$$

Для неограниченного твердого анизотропного тела при произвольных начальных условиях, задаваемых функцией $f(x_1, x_2, x_3)$, решение имеет вид

$$u = 8^{-1}(a\pi^3 t^3)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1', x_2', x_3') E\, dx',$$

где $E = \exp(-(x_i - x_i')(x_k - x_k') b_{ik}/4t)$, b_{ik} — тензор, обратный a_{ik}. Отсюда методом отражений получается решение для полуограниченного анизотропного твердого тела при нулевой температуре на границе. Высказывается предположение, что в ряде случаев замена $a_0\delta_{ik}$ на a_{ik} и δ_{ik}/a_0 на b_{ik} дает возможность перейти от изотропной задачи к анизотропной. Используя тензорную форму записи формулы Остроградского, автор применяет функции Грина для решения задачи теплопроводности в случае анизотропного тела. Показано, что в косоугольной системе координат, оси которой совпадают с главными направлениями теплопроводности, уравнение (1) может быть сведено к уравнению теплопроводности для изотропного тела. Д. Х. Каримов

3229. Два приложения биполярных координат к гидродинамике вязкой жидкости. Георгицэ (Două aplicaţii ale coordonatelor bipolare în hidrodinamica lichidelor vîscoase. Gheorghiţă St. I.), Gaz. mat. şi fiz., 1954, **A6**, № 4, 149—164 (рум.)

Рассматриваются две стационарные задачи гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, разрешимые в биполярных координатах. Первая задача относится к движению жидкости в трубе, поперечное сечение которой образовано дугами двух пересекающихся окружностей, и математически тождественна соответствующей задаче кручения, решение которой известно (см., напр., работу референта: Биполярные координаты в теории упругости, ГТТИ, 1950, на которую имеется ссылка у автора). Вторая задача о движении смазочного слоя между двумя эксцентрическими цилиндрами, как указывает автор, решена Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным; первое опубликование ее относится еще к 1904 г. (см. также том II полного собр. соч. С. А. Чаплыгина). Таким образом, реферируемая статья повторяет известные результаты. Я. С. Уфлянд

3230. Об асимптотике собственных значений оператора Лапласа. Гринберг С. И., Успехи матем. наук, 1953, 8, № 6, 97—102

Асимптотические формулы для собственных значений λ_ν дифференциальных операторов с частными производными можно получить, используя асимптотические формулы для суммы ряда $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\lambda_\nu(\lambda_\nu + p)$ при $p \to +\infty$ (Carleman T., Ber. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Klasse, 1936, 88, 119; Келдыш, Докл. АН СССР, 1951, 87, № 1, 11—14). Найден второй член асимптотического разложения суммы этого ряда ($p \to +\infty$) для краевой задачи $\Delta u + \lambda u = 0$ в трехмерной области D при краевом условии $u = 0$. Доказано, что при $p \to +\infty$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu(\lambda_\nu + p)} = \frac{v}{4\pi\sqrt{p}} - \frac{S \ln p}{16\pi p} + \frac{O(1)}{p},$$

где v — объем области D, S — площадь его границы. (Первый член был получен еще Карлеманом.) Пусть $K(s, x) = (4\pi r)^{-1} - H(s, x)$ — функция Грина рассматриваемой краевой задачи и

$$\Gamma(s, x; \lambda) = [4\pi r \exp(\sqrt{-\lambda} r)]^{-1} - Q(s, x; \sqrt{-\lambda})$$

— резольвента ядра $K(s, x)$. Тогда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu(\lambda_\nu - \lambda)} = \frac{v}{4\pi\sqrt{-\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\iiint_D [H(x, x) - Q(x, x; \sqrt{-\lambda}]\, dv.$$

Исследование подинтегральной функции для точек, отстоящих от границы больше чем на δ, проводится обычным методом. Для исследования этой функции вблизи границы используется принцип максимума, который позволяет сравнить H с соответствующими функциями для шаров, касающихся границы в основании нормали, опущенной из x на границу. Шары выбираются так, что один лежит в D, а другой содержит D. При этом предполагается, что граница S имеет положительную ограниченную кривизну. Аналогичные результаты для двумерной задачи недавно получены Плейелем (РЖМат, 1955, 1240) другим методом. В. А. Марченко

3231. Об асимптотическом распределении собственных функций колебания упругого тела. Бурчуладзе Т. В., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, **15**, № 4, 193—200

Изучается задача о собственных значениях уравнения

$$a\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u - b\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u + \omega u = 0$$

при граничном условии $T_i u|_S = 0$ в области B_i трехмерного пространства, ограниченной поверхностью Ляпунова S. Здесь a, b — константы, ω — собственные значения, T — оператор напряжения, $u = (u_1, u_2, u_3)$ — регулярный в B_i собственный вектор. Автор получает следующую асимптотическую формулу:

$$\sum_{\omega_n \leqslant t} \{u_k^{(n)}(Q)\}^2 \sim 1/6\pi^2\,[(1/a)^{3/2} + 2(1/b)^{3/2}]\, t^{3/2}$$

(Q — произвольная внутренняя точка B_i). Б. М. Левитан

3232. Метод решения общей бигармонической задачи для прямоугольной области при задании на контуре значений функции и ее нормальной производной. Гринберг Г. А., Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С., Прикл. матем. и механика, 1953, **17**, № 1, 73—86

Излагается метод решения неоднородного бигармонического уравнения на плоскости при условии, что на контуре области заданы значения искомой функции и ее нормальной производной. Для решения уравнения вида $\Delta\Delta w = Q$, подбирается какая-либо функция w_0, для которой $\Delta\Delta w_0 = Q$. Пусть $u = \Delta w - \Delta w_0$, функция u гармоническая; если $\{\psi_n(x, y)\}$ — полная система гармонических в данной области ортонормированных функций, то $u = \sum u_n \psi_n$, где коэффициенты u_n просто определяются по данным задачи. Когда u известна, w находится из решения задачи Дирихле или Неймана для уравнения Пуассона. Авторы излагают процесс ортогонализации системы линейно независимых функций, не отмечая, что этот процесс хорошо известен и приводится во всех учебниках интегральных уравнений. Фактически ортогонализация проводится для прямоугольной области по отношению к следующей системе гармонических функций, полной в прямоугольнике:

$$\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n+1}{2a}\pi x\,\frac{\operatorname{ch}\frac{n+1}{2a}\pi y}{\operatorname{ch}\frac{n+1}{2a}\pi b}+\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi y}{2b}\,\frac{\operatorname{ch}\frac{n\pi x}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}};$$

$$\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n+2}{2a}\pi x\,\frac{\operatorname{sh}\frac{n+2}{2a}\pi y}{\operatorname{sh}\frac{n+2}{2a}\pi b}+$$

$$+\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n+1}{2b}\pi y\,\frac{\operatorname{sh}\frac{n+1}{2b}\pi x}{\operatorname{sh}\frac{n+1}{2b}\pi a};$$

$$\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n+1}{2a}\pi x\,\frac{\operatorname{sh}\frac{n+1}{2a}\pi y}{\operatorname{sh}\frac{n+1}{2a}\pi b}+$$

$$+\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n+1}{2b}\pi y\,\frac{\operatorname{ch}\frac{n+1}{2b}\pi x}{\operatorname{ch}\frac{n+1}{2b}\pi a};$$

$$\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n+2}{2a}\pi x\,\frac{\operatorname{ch}\frac{n+2}{2a}\pi y}{\operatorname{ch}\frac{n+2}{2a}\pi b}+\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi y}{2b}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{2b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{2b}}.$$

Приведены таблицы коэффициентов для значений $n = 1, \ldots, 9$. В задаче об изгибе квадратной плиты находится приближенное значение функции u и указывается, что для нахождения прогиба w следует решить еще задачу Дирихле или Неймана.

Примечание референта. Указанный метод развит, и притом гораздо полнее, З. Х. Рафальсоном (Докл. АН СССР, 1949, **64**, № 6, 799—802), который установил, в частности, что для нахождения w нет необходимости решать задачу Дирихле или Неймана (w определяется в замкнутой форме в квадратурах после того как u построена); З. Х. Рафальсон установил также связь своего метода с вариационным и получил отсюда ряд следствий. Ссылка на работу Рафальсона есть в предыдущей статье Г. А. Гринберга (Докл. АН СССР, 1951, **76**, № 5, 661—664). В реферируемой статье этой ссылки нет. С. Г. Михлин

3233. Плоская динамическая задача о распределении напряжений в круглом упругом цилиндре. Сидляр (Плоска динамічна задача по розподілі напруг у круглому пружному циліндрі, Сідляр М. М.) Математичний збірник, 1953, № 7, 67—74 (укр.)

Изучается плоская динамическая задача распределения напряжений в круглом упругом цилиндре, подвергнутом внезапному действию равномерно распределенных вдоль контура радиальных сил и импульсов, в предположении, что цилиндр в момент их приложения находился в состоянии покоя. При решении используются методы операционного исчисления. Получены выражения для нормальных напряжений в виде рядов, содержащих бесселевы функции. И. Н. Карцивадзе

3234. Применение метода наложенных сеток к изучению различных задач теории упругости. Малавар, Бошер (Applications de la méthode des réseaux superposés à l'étude de divers problèmes d'élasticité. Malavard Lucien, Bosche Jean), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 10, 1093—1095 (франц.)

Предлагается метод электрических аналогий для приближенного решения системы

$$\frac{\partial}{\partial x}(m\overline{V}'_x)+\frac{\partial}{\partial y}(x\overline{V}'_y)=A\overline{V}+F, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(pV'_x)+\frac{\partial}{\partial y}(qV'_x)=-C\overline{V}+BV+G, \qquad (2)$$

где $V, \overline{V}$ — искомые, $m, n, p, q, A, B, C, F, G$ — известные функции от x, y. Указывается, что к системе (1) сводятся некоторые задачи теории упругости (плоская и осесимметричное напряженные состояния, изгиб пластинки, пластинка на упругом основании и т. д.). Вопрос удовлетворения граничных условий в статье не освещен. В. И. Моссаковский

3235. Решение задач диффракции электромагнитных волн на круглых дисках и отверстиях при помощи волновых векторных функций. I. Волновые векторные функции сжатого сфероида. Фламмер (The vector wave function solution of the diffraction of electromagnetic waves by circular disks and apertures. I. Oblate spheroidal vector wave functions. Flammer Carson), J. Appl. Phys., 1953, **24**, № 9, 1218—1223 (англ.)

Рассматриваются соленоидальные решения волнового векторного уравнения

$$(\nabla^2 + k^2)\,\mathbf{A} = 0. \qquad (1)$$

Источники отсутствуют, если

$$\mathbf{A} = \nabla\psi \times \mathbf{a},\ \mathbf{a} = K_1\mathbf{e} \text{ или } \mathbf{a} = K_2\mathbf{r}, \qquad (2)$$

где ψ удовлетворяет волновому уравнению $(\nabla^2 + k^2)\,\psi = 0$, K_1 и K_2 — постоянные, $\mathbf{e}$ — постоянный единичный вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор. Для того чтобы получить волновые векторные функции сжатого сфероида, величины, входящие в (2), выражаются в системе координат сжатого сфероида (эллипсоида вращения):

$$x = 2^{-1}d\,[(1-\eta^2)(1+\xi^2)]^{1/2}\cos\varphi,$$

$$y = 2^{-1}d\,[(1-\eta^2)(1+\xi^2)]^{1/2}\sin\varphi,$$

$$z = d\eta\xi/2,$$

где $-1 \leqslant \eta \leqslant 1,\ 0 \leqslant \xi \leqslant \infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

Собственные волновые функции сжатого сфероида выражаются в форме

$$\psi e,o_{mn}^{(i)}(\eta,\xi,\varphi)=S_{mn}^{(1)}(-ic,\eta)\,R_{mn}^{(i)}(-ic,i\xi)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi, \tag{3}$$

где $c=kd/2$. Функции $S_{mn}^{(1)}(-ic,\eta)$ являются угловыми волновыми функциями сжатого сфероида 1-го рода, а $R_{mn}^{(1)}$ — радиальными функциями i-го рода ($i=1,2,3,4$). Собственные волновые векторные функции получаются при подстановке (3) в (2), операцией rot, примененной к (2), а также линейными комбинациями. Например:

$$\mathbf{Me},o_{mn}^{u(i)}(\eta,\xi,\varphi)=\nabla\psi e,o_{mn}^{(i)}\left(\eta,\xi,\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\times\mathbf{e}_u,$$

$$\mathbf{Ne},o_{mn}^{u(i)}(\eta,\xi,\varphi)=k^{-1}\nabla\times\mathbf{Me},o_{mn}^{u(i)}(\eta,\xi,\varphi),$$

где $u=x,\ y,\ z$. Получаемые системы волновых векторных функций неортогональны на поверхности сфероида. Полнота системы не обсуждается.

Дается разложение плоско-поляризованной векторной волны по функциям **M** и **N**. Исходной формулой для получения разложения является выражение функции Грина в системе координат сжатого сфероида

$$\frac{\exp(ik\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|)}{4\pi\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,|}=$$

$$=\frac{ik}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(2-\delta_{0m})}{N_{mn}}\,S_{mn}^{(1)}(-ic,\eta)\,S_{mn}^{(1)}(-ic,\eta')\times$$

$$\times\,R_{mn}^{(1)}(-ic,i\xi)\,R_{mn}^{(3)}(-ic,i\xi')\cos m(\varphi-\varphi'),\quad \xi'>\xi.$$

При удалении источника в бесконечность таким образом, чтобы плоская волна распространялась в плоскости yz в направлении, составляющем угол ζ с положительной осью z, получается разложение

$$\exp(ik(y\sin\zeta+z\cos\zeta))=$$

$$=\sum_{m,n}\gamma_{mn}(\zeta)\,\psi e_{mn}^{(1)}\left((\eta,\xi,\varphi-\frac{\pi}{2}\right), \tag{4}$$

$$\gamma_{mn}=2(2-\delta_{0m})\,i^n N_{mn}^{-1}S_{mn}^{(1)}(-ic,\cos\zeta).$$

Возможные разложения плоской волны получаются применением операции grad к (4) и векторным умножением на $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$. Применением операции rot к полученным так выражениям получаются и другие разложения. Для волны, распространяющейся в направлении z ($\zeta=0$), имеются два разложения:

$$\mathbf{e}_x\exp(ikz)=k^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_{0n}Me_{0n}^{y(1)}(\eta,\xi,\varphi),$$

$$\mathbf{e}_x\exp(ikz)=k^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}b_{1n}Me_{1n}^{z(1)}(\eta,\xi,\varphi).$$

П. П. Бирюлин

3236. Круговая щель в круглом волноводе, возбуждаемом основной аксиально-симметричной электрической волной. Шейнголд, Сторер (Circumferential gap in a circular wave guide excited by a dominant circular-electric wave. Sheingold Leonard S., Storer James E.), J. Appl. Phys., 1954, **25**, № 5, 545—552 (англ.)

Рассматривается влияние круговой щели малой ширины $2g$ в идеальном бесконечно длинном круглом волноводе радиуса a, возбуждаемом аксиально-симметричной волной типа TE, на поле внутри и вне волновода. Область внутри волновода обозначается индексом I, вне волновода — индексом II. Поле $E_\varphi^{\mathrm{II}}(r,z)$ вне волновода представляется при помощи функции Грина $G^{\mathrm{II}}(r,r',z-z')$ в виде

$$E_\varphi^{\mathrm{II}}(r,z)=\int_{-g}^{g}\left[\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}r'G^{\mathrm{II}}\right]_{r'=a}\xi(z')\,dz'$$

Здесь $LG^{\mathrm{II}}\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}+k^2\right),G^{\mathrm{II}}(r,r',z-z')=$ $=\delta(z-z')\,\delta(r-r')/r'$ при $r>a$, $G^{\mathrm{II}}(r,r',z-z')|_{r=a}=0$; $\xi(z')=[E_\varphi(r,z')]_{r=a}$ — значения поля на щели. Для G^{II} дано представление в форме

$$\left[\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\,r'G^{\mathrm{II}}(r,r',z-z')\right]_{r'=a}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\zeta(z-z')}\,H_1^{(1)}[(k^2-\zeta^2)^{1/2}r]\,d\zeta\Big/H_1^{(1)}[(k^2-\zeta^2)^{1/2}a].$$

Аналогично в области I:

$$E_\varphi^{\mathrm{I}}(r,z)-E_{\varphi\ \text{нач}}^{\mathrm{I}}(r,z)-$$

$$-\int_{-g}^{g}\left[\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}r'G^{\mathrm{I}}(r,r',z-z')\right]_{r'=a}\xi(z')\,dz',$$

где $E_{\varphi\ \text{нач}}^{\mathrm{I}}$ — начальное поле TE, равное

$$\rho_1 J_1\left(\rho_1\frac{r}{a}\right)\alpha(z)\Big/i\gamma_1 a^2 J_0(\rho_1),\ J_1,(\rho_1)=0,$$

$$\gamma_1^2=k^2-(\rho_1/a)^2,\alpha(z)=A\cos\gamma_1 z+B\sin\gamma_1 z).$$

Для G^{I} дается представление в виде

$$-\left[\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}r'G^{\mathrm{I}}(r,r',z-z')\right]_{r'=a}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_C e^{i\xi(z-z')}\,J_1[(k^2-\zeta^2)^{1/2}r]\,d\zeta\Big/J_1[(k^2-\zeta^2)^{1/2}a],$$

где C — действительная ось с обходом точек $-\gamma_1$ сверху, а $+\gamma_1$ снизу.

Вычисляя компоненты поля $H_z=-\frac{i}{\omega\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}rE_\varphi$ и приравнивая на поверхности щели поля H_z^{I} и H_z^{II}, автор получает интегральное уравнение первого рода относительно функции $\xi(z')$:

$$\alpha(z)\left[1+\int_{-g}^{g}\alpha(z')\,\xi(z')\,dz'\right]=\int_{-g}^{g}k(z-z')\,\xi(z')\,dz', \tag{1}$$

где ядро $k(z-z')$ выписывается в явном виде.

Умножив (1) на $\xi(z)$, проинтегрировав его по z от $-g$ до g и разделив обе части на $A^2=[\int_{-g}^{g}\alpha(z)\,\xi(z)dz]^2$, автор приходит к выражению, имеющему свойства вариационного функционала

$$\Delta=(1+A)/A=\int_{-g}^{g}\int_{-g}^{g}k(z-z')\,\xi(z)\,\xi(z')\,dzdz'/A^2$$

Если выбрать в качестве функций сравнения функции $\xi_e=(g^2-z^2)^{1/2}$ и $\xi_0=z(g^2-z^2)^{1/2}$, то для Δ получатся приближенные выражения

$$\Delta_e=\frac{\gamma_1 a}{\rho_1^2}\left\{\frac{(ka)^2}{4}+i\frac{4}{\pi}\left(\frac{a}{g}\right)^2\right\}\text{ и}$$

$$\Delta_0=\frac{1}{\gamma_1 a\rho_1^2}\left\{\frac{(ka)^4}{16}+i\frac{32}{\pi}\left(\frac{a}{g}\right)^4\right\}$$

Величины $\Gamma_e=(\Delta_e-1)/(\Delta_e+1)$ и $\Gamma_0=(\Delta_0-1)/(\Delta_0+1)$ истолковываются как коэффициенты отражения четной и нечетной волн. Проведенные эксперименты дают хорошее совпадение с теоретическими расчетами. Ю. Н. Днестровский

3237. К вопросу об излучении с открытого конца системы Лехера или волновода при большом расстоянии от отверстия. Флориан (Zur Abstrahlung vom offenen Ende einer Lecherleitung und eines Hohlrohres

in großer Entfernung von der Öffnung. Florian H.), Acta phys. austriaca, 1953, 8, № 1, 42—62 (нем.)

Изучаемое поле излучения описывается уравнениями

$$\mathbf{E} = g^{(m)} \operatorname{rot} \mathbf{G}, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{G},$$

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{2\pi g^{(m)}} \int_F \frac{j^{(m)} e^{ikR'}}{R'} dF,$$

где $j^{(m)}$ — поверхностная плотность тока на отверстии, $g^{(m)}$ — электродинамическая проводимость в переменном магнитном поле, R' — расстояние от переменной точки поля до точки источника. Интегрирование распространяется по всей поверхности экрана, закрывающего отверстие.

Обозначая через R, θ, φ сферические координаты внешнего пространства, автор показывает, что при большом R для составляющей G_φ справедливо приближенное выражение

$$G_\varphi = \frac{iVe^{ikR}}{g^{(m)} Rk \sin\theta \ln \frac{b}{a}} [J_0(kb \sin\theta) - J_0(ka \sin\theta)],$$

где a, b — внутренний и внешний радиусы Лехера, $J_0(x)$ — бесселева функция нулевого порядка. Аналогичное выражение получается для составляющей H_φ.

В случаях волновода с круговым и прямоугольным поперечными сечениями G_φ выражается рядами, общий член которых приведен. Н. С. Кошляков

3238. Вариационные принципы электромагнитного поля. Прателли (Principi variazionali del campo elettromagnetico. Pratelli Aldo M.), Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1953, **7**, № 3—4, 161—203 (итал.)

Подробный обзор вариационных принципов для полей различного типа. Вариационные функционалы строятся для областей C, ограниченных замкнутыми поверхностями S.

В первой части рассматриваются простейшие случаи электростатического и магнитостатического полей. Далее формулируется принцип наименьшего действия для уравнений Максвелла в трехмерном пространстве и в пространственно-временном континууме. Рассматриваются вариационные принципы для нейтральных мезонных полей скалярного и векторного типов, приводящие к уравнениям Клейна — Гордона для потенциалов. В заключительном параграфе исследуются вариационные функционалы для скалярных и векторных полей в пятимерном многообразии.

Ю. Н. Днестровский

3239. Определение водности облаков по их рассеивающей способности. Фейгельсон Е. М., Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, 1954, № 23, 92—105

Рассматривается метод определения водности облаков (плотности воды в облаке) по их рассеивающей способности в предположении, что ослабление падающего на облако параллельного потока лучистой энергии происходит только путем рассеяния на капельках воды. Интенсивности излучения в точке P ($I_1(P, r)$ — в направлении r от распространяющегося вдоль оси x параллельного пучка лучей и $I_2(P, r)$ — в противоположном направлении) определяются из уравнений

$$l\frac{\partial I_1}{\partial x} + m\frac{\partial I_1}{\partial y} + n\frac{\partial I_1}{\partial z} = \sigma[K_1 - I_1]$$
$$-l\frac{\partial I_2}{\partial x} - m\frac{\partial I_2}{\partial y} - n\frac{\partial I_2}{\partial z} = \sigma[K_2 - I_2] \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$I_1(0, y, z, r) = \begin{cases} \varphi(y, z)/\Delta\omega & \text{при } y;\ z \in R \text{ и } l > 0 \\ 0 & \text{при } y;\ z \notin R \text{ или } l > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$I_2(\infty, y, z, r) = 0$ при $l \geqslant 0$.

где

$$K_1(P, r) = \frac{1}{4\pi}\int_+ I_1(P, r')\gamma_{11}(r', r)\,d\omega' +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_+ I_2(P, r')\gamma_{21}(r', r)\,d\omega', \qquad (3)$$

$$K_2(P, r) = \frac{1}{4\pi}\int_+ I_1(P, r')\gamma_{12}(r', r)\,d\omega' +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_+ I_2(P, r')\gamma_{22}(r', r)\,d\omega',$$

l, m, n — направляющие косинусы луча, $\gamma(r, r')$ — индикатриса рассеяния, зависящая только от направления падающего и рассеянного луча, R — область, ограниченная контуром прожектора, дающего параллельный пучок лучей, $\varphi(y, z)/\Delta\omega$ — интенсивность прожектора, которая считается постоянной, ω — телесный угол.

Решая систему (1), (2) и подставляя результат в (3), автор получает систему интегральных уравнений с неизвестными K_1 и K_2, которая может быть решена методом последовательных приближений, причем сходимость этих приближений обеспечена (Кузнецов Е. С., Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1943, № 5). Показано, что при наблюдении вдоль оси пучка при пренебрежении рассеянием первого порядка можно пренебречь и рассеянием второго порядка, а при наблюдении под углом — интенсивности рассеяния первого и второго порядка сравнимы по величине.

Для определения водности облаков по измерениям интенсивности рассеянной энергии, приходящей к наблюдателю, решаются две задачи: а) по известным $I_1(P, r)$ и $I_2(P, r)$ определяется коэффициент рассеяния σ из уравнений (1) и (3); б) устанавливается связь σ с водностью облака.

Решение задачи а) при учете рассеяния второго порядка сводится к сложному нелинейному относительно $\gamma(r, r')$ и трансцендентному относительно σ уравнению. Пренебрегая рассеянием второго порядка, автор получает решение в конечном виде. Для решения задачи б) вводится «эффективное поперечное сечение» $\varepsilon(\lambda, r)$, характеризующее рассеяние энергии длины волны λ на капле радиуса r. Тогда для связи среднего коэффициента рассеяния $\sigma(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda, r)$ получается соотношение $\sigma(\lambda) = \int_0^R \varepsilon(\lambda, r) N(r)\,dr$, которое при известном $\sigma(\lambda)$ можно рассматривать как интегральное уравнение относительно $N(r)$ — функции распределения капель по размерам. А. А. Пивоваров

3240 К. Дифференциальные уравнения техники и физики. Хорт (Die Differentialgleichungen der Technik und Physik. Hort Wilhelm, 582 S., Leipzig, Barth., 1954, 38 Lw.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 17, 780 (библ.)

3241 К. Уравнение Максвелла. Пахнер (Maxwellovy rovnice. Pachner Jaroslav, 169 s., Praha, Přehl. lit., 1954, 12.15. Kčs.), Česka kniha, 1954, № 13, 399 (библ.)

3242 Д. Нестационарная краевая задача Озеена. Авалишвили Л. Е. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилис. матем. ин-т, Тбилиси, 1954

См. также: 2989, 3247, 3253, 3290, 3291, 3300, 3331, 3432 Д, 3433 Д

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3243. Интегральные уравнения с нормальными ядрами. Чжан Ши-Сюнь (具正規核的積分方程. 張世勛), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 1, 1—20 (кит.; резюме англ.)

Автор рассматривает ядра $k(x, y)$, принадлежащие комплексному пространству L_2, которые он предполагает нормальными, т. е. удовлетворяющими условию

$$\int_a^b k(x, \xi)\,\overline{k(y, \xi)}\,d\xi = \int_a^b \overline{k(\xi, x)}\,k(\xi, y)\,d\xi.$$

Показывается, что если $\varphi_h(x)$, $\psi_h(x)$ и λ_h — собственные функции и собственные значения в смысле Е. Шмидта ядра $k(x, y)$, т. е.

$$\varphi_h(x) = \lambda_h \int_a^b k(x, \xi)\,\psi_h(\xi)\,d\xi,\quad \psi_h(x) = \lambda_h \int_a^b \overline{k(\xi, x)}\,\varphi_h(\xi)\,d\xi,$$

то: 1) $\{\lambda_h^n\}$ является множеством собственных значений в смысле Е. Шмидта n-й итерации ядра; 2) если λ_h имеет ранг h_ρ и $\varphi_{hi}(x)$, $\psi_{hi}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, h_\rho$ — собственные функции в смысле Е. Шмидта, соответствующие λ_h и такие, что $(\varphi_{hi}, \varphi_{hj}) = (\psi_{hi}, \psi_{hj}) = \delta_{ij}$, то необходимым и достаточным условием нормальности ядра является

$$\varphi_{hi}(x) = \sum_{j=1}^{h_\rho} a_{h,ij}\,\psi_{hj}(x),$$

где $(a_{h,ij}) = \Delta$ — унитарная матрица. В этом случае

$$\psi_{hi}(x) = \sum_{j=1}^{h_\rho} \overline{a}_{h,ji}\,\varphi_{hj}(x)$$

и для n-й итерации ядра имеет место аналогичная формула с заменой матрицы Δ на Δ^n. Далее обобщается на случай нормальных ядер теорема о билинейном разложении ядра. Затем автор рассматривает систему собственных функций и чисел в обычном смысле нормального ядра $k(x, y)$ и дает обобщение формулы Е. Шмидта для решения неоднородного интегрального уравнения и формулы Д. Гильберта для разложения билинейного функционала. В. И. Соболев

3244. Об одном интегральном уравнении, обобщающем уравнение Вольтерра первого рода. Распространение одной теоремы Ле Ру. Жерме (Sur une équation intégrale généralisant l'équation de première espèce de Volterra. Extension d'un théorème de Le Roux. Germay R. H.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1954, 68, ser. 1, № 1—2, 34—41 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$\int_0^x \Phi(x, s, y(s))\,ds = f(x), \qquad (1)$$

где $\Phi(x, s, y)$ определена и непрерывна при $0 \leqslant x, s \leqslant a$, $y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b$, имеет непрерывные производные $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$, причем $\partial\Phi/\partial x$ удовлетворяет по y условию Липшица; $\Phi(x, x, y)$ при закрепленном x или при закрепленном y не обращается тождественно в нуль; $f(x)$ непрерывно дифференцируема в $(0, a)$ и $f(0) = 0$; наконец,

$$\Phi(0, 0, y) - f'(0) = 0,\quad \partial\Phi(0, 0, y_0)/\partial y \neq 0. \qquad (2)$$

При этих условиях доказывается, что уравнение (1) имеет для $0 \leqslant x \leqslant h$ $(h \leqslant a)$ одно и только одно непрерывное решение $y(x)$, обращающееся в y_0 при $x = 0$ (в тексте ошибочно напечатано $x = x_0$).

Способом Ле Ру, известным для интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода (см., например, Г. Мюнц, Интегральные уравнения, Л.—М., 1934, стр. 132), а именно дифференцированием по x уравнение (1) приводится к виду

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, s, y(s))\,ds + \Phi(x, x, y(x)) = f'(x)$$

и решается методом последовательных приближений по формулам:

$$y_0(x) = y_0,\qquad y_{n+1}(x) = y_n(x) -$$

$$- \frac{\Phi(x, x, y_n(x)) + \int_0^x [\partial\Phi(x, s, y_n(s))/\partial x]\,ds - f'(x)}{\partial\Phi(0, 0, y_0)/\partial y}$$

Аналогичным образом решается более общее уравнение $\Omega(x, u_1, \ldots, u_p) = f(x)$, где $u_j = \int_0^x \Phi_j(x, s, y(s))\,ds$, $j = 1, \ldots, p$; $\partial\Omega/\partial x$, $\partial\Omega/\partial u_j$ $(j = 1, \ldots, p)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по $u_1, \ldots, u_p$, при дополнительных требованиях типа (2). М. К. Фаге

3245. Приложение интегральных уравнений Гюнтера с симметрическим ядром. Щелкунов В. А., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 36, матем. науки, кн. 7, 101—107

Замечая, что интегральное уравнение Гюнтера

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{(E)} M(x, \omega)\,u(\xi)\,d\omega, \qquad (1)$$

где $\xi \in (\omega)$, $f(x)$ — функция точки области (E), а $M(x, \omega)$ — средняя аддитивная функция области (ω) и параметра x, принимает вид

$$u(x) = f(x) + \lambda[A(x)\,u(a) + B(x)\,u(b)] + \lambda \int_a^b K(x, t)\,u(t)\,dt,$$

когда $E = [a, b]$ и

$$M(x, \omega) = F(x, \omega) + A(x)\,\varphi(\omega) + B(x)\,\psi(\omega), \qquad (2)$$

а $F(x, \omega)$, $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$ — некоторые определенные функции, автор ищет условия, определяющие неотрицательные числа P, Q и положительную среднюю функцию $T(\omega)$ так, чтобы ядро (2) было симметрическим в определенном смысле относительно функции $\pi(\omega) = T(\omega) + P\varphi(\omega) + Q\psi(\omega)$ и удовлетворяло некоторым условиям, при которых Н. М. Гюнтер (Тр. Физ.-матем. ин-та им. Стеклова, 1932, 1) установил для уравнения (1) существование и вещественность характеристических чисел, ортогональность относительно $\pi(\omega)$ фундаментальных функций, соответствующих различным характеристическим числам, и указал условия разложимости решения (1) в ряд по фундаментальным функциям.

Показано, что условия Гюнтера выполняются, если для любых областей (ω) и (τ)

$$\int_{(\omega)} T(\omega)\,d\omega \int_{(\tau)} K(\xi, t)\,dt = \int_{(\tau)} T(\tau)\,d\tau \int_{(\omega)} K(\eta, t)\,dt,$$

где $\eta \in (\tau)$;

$$P \int_{(\tau)} K(a, t)\,dt = \int_{(\tau)} T(\tau)\,A(\eta)\,d\tau;$$

$$Q \int_{(\tau)} K(b, t)\,dt = \int_{(\tau)} T(\tau)\,B(\eta)\,d\tau;$$

$$Q \cdot A(b) = P \cdot B(a).$$

При некоторых частных предположениях относительно функции $T(\omega)$ получены более простые условия.

Б. И. Александрийский

3246. О непрерывных цепных дробях и некоторых системах интегральных уравнений в смысле Стилтьеса. Уолл (Concerning continuous continued fractions and certain systems of Stieltjes integral equations. Wall H. S.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, 2, № 1, 73—84 (англ.)

Пусть f и g — функции, определенные на отрезке (a, b), z — любое вещественное число, Δ $(a = x_0 < x_1 < \ldots$

$\ldots < x_{n+1} = b$) — разбиение отрезка (a, b), $\sigma(\Delta) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |x_{i+1} - x_i|$, $h_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, $k_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$ ($i = 1, 2, \ldots, n+1$). Обозначим через $\Phi_\Delta[a, b]$ цепную дробь $[h_1; k_1, h_2, k_2, \ldots, h_{n+1}, k_{n+1}, z]$. Число w называется непрерывной цепной дробью от a до b, определяемой элементами (f, g, z), и обозначается через $\Phi_a^b(f, g, z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|\Phi_\Delta(a, b) - w| < \varepsilon$$

для любого разбиения Δ с $\sigma(\Delta) < \delta$. Этот предельный переход, в известной мере аналогичный переходу от конечных сумм к интегралам, рассматривал Пуиг Адам (Puig Adam P., Rev. mat. hisp.-amer., 1951, **11**, 180—190), который доказал существование $\Phi_a^b(f, g, z)$ в случае, когда $z > 0$, а f и g имеют в $[a, b]$ положительные непрерывные производные. Основной результат настоящей статьи состоит в распространении этой теоремы на случай функций f, g, непрерывных и с ограниченной вариацией в отрезке $[a, b]$. Статья содержит доказательство этого утверждения и дает выражение величины $\Phi_a^b(f, g, z)$ через решения некоторой системы интегральных уравнений с интегралами Стилтьеса, содержащими $df(u)$ и $dg(u)$. А. Я. Хинчин

3247. Математическое изучение уравнения Больцмана. Марке (Étude mathématique de l'équation de Boltzmann. Marquet Simone), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 25, 1637—1640 (франц.)

Исследуются условия существования и единственности решения $F(r, t)$ ($r \geqslant 0$, $t \geqslant 0$) приведенного интегро-дифференциального уравнения Больцмана

$$\frac{\partial}{\partial t} F(r, t) + F(r, t) \int_0^\infty r_1^2 F(r_1, t) P(r_1, r)\, dr_1 = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty F(u, t) F(v, t)\, uv r^{-1} K(u, v, r)\, du dv,$$

где $P(r, r_1) = P(r_1, r) = 2r + 2r_1^2/3r$, если $r_1 \leqslant r$; $K(u, v, r) = 0$, если $u^2 + v^2 \leqslant r^2$; $K(u, v, r) = \min(u, v, r, \sqrt{u^2 + v^2 - r^2})$, если $u^2 + v^2 > r^2$; решения, обращающегося в данную функцию $f(r)$ при $t \to 0$.

Доказательства лишь намечены; в них автор следует Карлеману (Carleman T., Acta Math., 1933, **60**, 91—146), рассмотревшему случай непрерывной начальной функции $f(r)$ и доказавшему существование и единственность решения $F(r, t)$, непрерывного по r ($0 \leqslant r < \infty$) при всех t ($0 \leqslant t < \infty$). М. К. Фаге

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3248. Интегральное уравнение, встречающееся в теории тонкого квазиосесимметричного тела. Берд (An integral equation occurring in the theory of a slender quasi-axisymmetrical body. Byrd Paul F.), J. Aeronaut. Sci., 1954, **21**, № 5, 351 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$g(x, \psi) = \int_{-1}^{+1} \frac{H(x, \zeta)}{\psi - \zeta}\, d\zeta,$$

где x — параметр, H — неизвестная функция, $\psi^2 > 1$ и все входящие в уравнение величины вещественные. Оно легко сводится к такому:

$$T(x, a) = \int_{-1}^{+1} \frac{H(x, \zeta)}{1 - 2a\zeta + a^2}\, d\zeta.$$

Допуская, что $T(x, a)$ разлагается в ряд по положительным степеням a и используя разложение функции $(1 - 2a\zeta + a^2)^{-1}$ в ряд по полиномам Чебышева второго рода, а также интегральное представление этих полиномов, автор находит, что

$$H(x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im}\left[(\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})\, T(x, \zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})\right].$$

С. Г. Михлин

3249. Контактная задача для кругового отверстия. Панасюк В. В., Науч. зап. Ин-та машиноведения и автоматики АН УССР, 1954, 3; Вопр. машиноведения и прочности в машиностроении, № 2, 59—79

Рассматривается задача о давлении жесткого штампа на границу кругового отверстия в упругой плоскости. Силы трения на линии контакта не учитываются.

Для определения давления в области контакта получено интегро-дифференциальное уравнение, встречающееся в теории крыла конечного размаха. Для случая, когда штамп является круговым диском, это уравнение решается приближенным методом, применяемым в аэромеханике при определении циркуляции крыла конечного размаха (Голубев В. В., Лекции по теории крыла, 1949). В. И. Моссаковский

См. также: 2989, 3206, 3432 Д

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3250. Об одном обобщении основной леммы вариационного исчисления. Видав (Sur une généralisation du lemme fondamental du calcul des variations. Vidav Ivan), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, v. 2, Amsterdam, 1954, 183 (франц.)

Приводится следующее обобщение основной леммы вариационного исчисления. Пусть функция $f(x, t)$ непрерывна в квадрате $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ и существует хотя бы одна непрерывная функция $\eta_0(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяющая условию $\min_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 f(x, t) \times \eta_0(x)\, dx > 0$. Если непрерывная функция $F(x)$ обладает таким свойством, что условие $\int_0^1 F(x)\eta(x)\, dx \geqslant 0$ выполняется для всех непрерывных функций $\eta(x)$, удовлетворяющих неравенству $\int_0^1 f(x, t)\eta(x)\, dx \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то существует по крайней мере одна неубывающая функция $\alpha(t)$ такая, что $F(x) = \int_0^1 f(x, t)\, d\alpha(t)$. Формулируется одна лемма, необходимая для доказательства приведенной теоремы. Доказательства отсутствуют. М. К. Керимов

3251. К теории вариационных задач с кратными интегралами. Вельте (Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale. Velte Waldemar), Math. Z., 1954, **60**, № 4, 367—383 (нем.)

В n-мерном пространстве R_n рассматривается вариационная задача в параметрической форме вида

$$\int \ldots \int f(x_i, p_{i_1, \ldots, i_m})\, dt_1 \ldots dt_m = \min, \qquad (1)$$

где $p_{i_1, \ldots, i_m}$ — определители m-го порядка матрицы $(\partial x_i / \partial t_\alpha)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha = 1, 2, \ldots m$; $m < n$); функция $f(x, p)$ предполагается достаточное число раз непрерывно дифференцируемой по всем переменным x и p, положительной и удовлетворяющей условию $f(x, cp) = cf(x, p)$, $c > 0$. Показывается, что на задачу

(1) можно распространить теорию Каратеодори о вариационных задачах с кратными интегралами в непараметрическом виде, изложенную им и его учениками в ряде работ (см., например, Carathéodory C., Acta litter. ac. scient. Szeged, 1929, **4**, 193—216; Boerner H., Math. Ann., 1936, **112**, 187—220). Именно, для задачи (1) находятся достаточные условия минимума (Вейерштрасса — для сильного минимума и Лежандра — для слабого минимума), развиваются теория Гамильтона — Якоби и теория поля.

Библиография, 16 названий. М. К. Керимов

3252. К теории вариационных задач с кратными интегралами. Вельте (Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale. Velte Waldemar), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, v. 2, Amsterdam, 1954, 181 (нем.)

Краткое сообщение о результатах, изложенных в статье автора (см. реф. 3251). М. К. Керимов

3253. Задачи Неймана для уравнений вариационного исчисления. Стампаккья (Problèmes de Neumann relatifs aux équations du calcul des variations. Stampacchia Guido), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, v. 2, Amsterdam, 1954, 172 (франц.)

Пусть в n-мерной области T с границей L дана функция $F(x, u, p)$, $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p \equiv (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, непрерывная вместе с частными производными до второго порядка при всех конечных значениях u и p, причем квадратичная форма $\Sigma_{i,j} F_{p_i p_j} \lambda_i \lambda_j$ является положительно определенной. Пусть для всех $x \in L$ и для всех конечных u определена функция $\Phi(x, u)$, непрерывная вместе с Φ_u. Функции F и Φ должны удовлетворять еще некоторым дополнительным условиям (автор их не приводит). Пусть $u_0(x)$ удовлетворяет условиям: 1) u_0 абсолютно непрерывна относительно x_i $(i = 1, \ldots, n)$; 2) u_0 и $\partial u_0 / \partial x_i$ принадлежат L_2; 3) u_0 реализует экстремум функционала

$$I(u) = \int_T F(x, u, p)\, dx + \int_L \Phi(x, u)\, dx \quad (p_i = \partial u / \partial x_i).$$

Утверждается, что $u_0(x)$ почти всюду удовлетворяет уравнению Эйлера в T и условию $\Sigma_{i=1}^n F_{p_i} \nu_i + \Phi_u = 0$ на L, где ν_i — направляющие косинусы внутренней нормали к L. Далее сообщается, что можно доказать теорему существования абсолютного минимума для $I(u)$ и с ее помощью исследовать граничную задачу Неймана, связанную с рассматриваемой вариационной задачей. М. К. Керимов

3254. Уравнение Эйлера и (p, r)-координаты. Булен (Euler's equation and (p, r) coordinates. Bullen K. E.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 325, 172—174 (англ.)

Тяжелая однородная неупругая нить лежит в состоянии равновесия на поверхности прямого кругового конуса с вертикальной осью и вершиной, лежащей выше всех точек конуса. Требуется доказать, что если поверхность конуса развернуть на плоскость, то кривая, по которой расположится нить, будет иметь уравнение $p(a+br)=1$. Здесь r — полярный радиус, $p = r^2 (r^2 + r'^2)^{-1/2}$, $r' = dr / d\theta$, θ — полярный угол. Данная задача приводится к изопериметрической. Сопоставляются решения последней в полярных координатах (r, θ) и в координатах (p, r).

Л. Я. Цлаф

См. также: 2285, 3142, 3238, 3398

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

3255. О преобразованиях, сохраняющих монотонность. Кшиж (On monotonity-preserving transformations. Krzyż Jan), Ann. Univ. M. Gurie Skłodowska, 1952, **A6**, 91—111 (журанал вышел из печати в 1953 г.) (англ.; резюме русс., польск).

Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — последовательность функций действительного переменного t, определенных для $t \in D$; множество D содержит по крайней мере две точки. Обозначим через X_φ множество всех последовательностей $x = \{\xi_k\}$ таких, что ряд $\sum_{k=1}^\infty \varphi_k(t)\, \xi_k$ сходится для любого $t \in D$. Последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ определяет на множестве X_φ линейное преобразование

$$(\varphi) \qquad \Phi(t;\ x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\, \xi_k.$$

Преобразование (φ) сохраняет монотонность, если для каждой монотонной последовательности $x = \{\xi_k\} \in X_\varphi$ ее трансформация $\Phi(t; x)$ есть функция от t, монотонная в D, и если $\Phi(t; x)$ и $\{\xi_k\}$ — обе возрастающие или обе убывающие.

Доказывается:

1. Для того чтобы преобразование (φ) сохраняло монотонность всех монотонных последовательностей из X_φ, если каждая монотонная последовательность в X_φ есть нуль-последовательность, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{r} \varphi_k(t_1) \geqslant \sum_{k=1}^{r} \varphi_k(t_2) \qquad (1)$$

для $t_1, t_2 \in D$, $t_1 < t_2$, $r = 1, 2 \ldots$

2) Для того чтобы преобразование (φ) сохраняло монотонность всех монотонных последовательностей из X_φ, если X_φ содержит по крайней мере одну монотонную последовательность, не являющуюся нуль-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие (1) и $\sum_{k=1}^\infty \varphi_k(t) = a = \text{const}$ для каждого $t \in D$.

Далее устанавливаются некоторые признаки сохранения строгой монотонности. Некоторые из полученных результатов переносятся на случай интегральных операторов вида

$$\Phi(t) = \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

а также даются приложения к анализу методов суммирования.

В том же номере журнала приводится исправление леммы 5. 2. М. Д. Калашников

3256. Метод вычисления некоторых сумм, встречающихся при расчете физических свойств кристаллов. Хофф, Бенсон (A method for the evaluation of some lattice sums occurring in calculations of physical properties of crystals. Hoff B. M. E. van der, Benson G. C.), Canad. J. Phys., 1953, **31**, № 7, 1087—1094 (англ.)

Рассматривается метод преобразования ряда

$$\sum\nolimits'_{k,l,m} (k^2 + m^2 + l^2)^{-n}, \qquad (1)$$

где сумма берется по всем целым значениям k, l, m, кроме комбинации $k = l = m = 0$, n — целое или полуцелое число. Этот метод придает ряду (1) форму,

удобную для вычисления, и позволяет разделить влияние переменных k, l, m. Изображая общий член ряда по формуле:

$$(k^2+l^2+m^2)^{-n}=[\Gamma(n)]^{-1}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-(k^2+l^2+m^2)t}\,dt$$

и используя затем известный интеграл Макдональда

$$\int_0^\infty t^{n-1}e^{-k^2t-q^2\pi^2/t}\,dt=2(q\pi/k)^nK_n(2kq\pi),$$

где K_n — модифицированная функция Бесселя второго рода, авторы получают, например, равенство

$$\sum\nolimits'_{k,l=-\infty}^{\infty}(k^2+l^2)^{-3/2}=16\pi\sum_{k,l=1}^{\infty}K_1(2\pi kl)+$$
$$+4\zeta(2)+2\zeta(3).$$

Рассмотрены и другие частные случаи, например ряд $\sum_{k,l=-\infty}^{\infty}(a^2k^2+l^2)^{-3/2}$ и другие, сведенные в таблицу. Даны примеры числовых расчетов. Н. С. Кошляков

3257. Теория пространственных чисел. Фрисанчо-Пинеда (Teoria dimensional de los numeros. Frisancho Pineda Ignacio), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, **13**, № 4, 224—228 (исп.)

Автор вводит в рассмотрение «N-мерные числа», считая по определению: $Ae^{ix};\ jy;\ \ldots;\ nw=A(\cos x\cos y\ldots\cos w+i\sin x\cos y\ldots\cos w+j\sin y\cos z\ldots\cos w+\ldots+n\sin w)=A(a_1+ia_2+\ldots+na_n)$, пытаясь обобщить таким образом «2-мерные числа»: $Ae^{ix}=A(\cos x+i\sin x)$. Два «$N$-мерных числа» считаются равными, если соответственно равны их «модули» A и «компоненты» a_i $(i=1,2,\ldots,n)$. Определяя операции над введенными числами автор полагает: $e^{ix};\ jy;\ \ldots;\ nw\cdot e^{ix';}\ jy';\ \ldots;\ nw'=e^{i(x+x');}\ j(y+y');\ \ldots;\ n(w+w')$.

В статье ничего не говорится о весьма существенной неоднозначности такого тригонометрического представления «N-мерного числа», например $j=e^{ix;\ j\pi/2}$, и о неоднозначности умножения: $j^2=e^{2ix;\ j\pi}$ (никакой специальной таблицы произведений мнимых единиц не приводится). Утверждаемая автором дистрибутивность не имеет места, так как, например, $j\cdot(i-1)=j$, тогда как $j\cdot i=j$. А. И. Сколин

3258. О бесконечной линейной системе. Радо (Observaţii asupra unui sistem liniar infinit. Radó F.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române. Sec. mat. şi fiz., 1953, **5**, № 2, 285—292 (рум.)

Решение одной задачи теплопроводности методом Фурье приводит к бесконечной линейной системе

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^h u_n=A_h;\ h=0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

где $0\leqslant a_0<a_1<a_2<\ldots;\ a_n\to\infty$ при $n\to\infty$. В заметке показывается ошибочность утверждения Бореля (Borel E., Ann. École norm. supér., Paris, 1895, **12**, 9—55) о том, что если $g(z)$ — целая функция с простыми нулями a_n такая, что целая функция $g(z)/(z-a_n)$ допускает разложение $g(z)/(z-a_n)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^{(n)}z^\nu$, то при выполнении условия $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^h/|g'(a_n)|<\infty$, $h=0,1,2,\ldots$,

$$u_n=\{\textstyle\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^{(n)}A_\nu\}/g'(a_n),\quad n=0,1,2,\ldots, \qquad (2)$$

есть решение системы (1). Действительно, если $a_n=\pi n$, $A_0=A_1=1$, $A_2=A_3=\ldots=0$, $g(z)=e^z\sin z$, то u_n не удовлетворяет (1) при $h=1$. Доказывается, что если система (1) допускает (при $n^r=O(a_n)$, $r>0$) два различных решения, то (1) допускает бесчисленное множество решений. Решение $\{u_n\}$ называется принадлежащим к I классу относительно целой функции $g(z)$, если

$$\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|\sum_{h=0}^{\infty}|c_h^{(p)}(a_n)^h|<\infty,\quad p=0,1,2,\ldots;$$

автор показывает, что существует не более одного решения I класса, причем в случае существования это решение (1) выражается формулой Бореля (2). Условие

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left|\frac{c_h^{(p)}(a_n)^h\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu^{(n)}A_\nu}{g'(a_n)}\right|<+\infty \qquad (3)$$

необходимо для существования решения I класса. Если однородная система $\sum_{h=0}^{\infty}c_h^{(p)}\xi_h=0$ $p=0,1,2,\ldots$ имеет только тривиальное решение $\xi_h=0$, $h=0,1,2,\ldots$, то условие (3) достаточно для того, чтобы формула Бореля (2) давала решение системы (1). Условие (3) следует из более простого, но зато и более ограничительного условия

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}|c_h^{(p)}|(a_n)^h/|g'(a_n)|<\infty.$$

Л. И. Камынин

3259. Естественный подход к основной теореме интегрального исчисления. Хойт (A natural approach to the fundamental theorem of the integral calculus. Hoyt J. P.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 6, 413—415 (англ.)

Цель работы, как указывает автор, — облегчить начинающим студентам понимание значения основной теоремы интегрального исчисления. Под последней автор понимает формулу $\int_{x_0}^{x_n}df(x)=f(x_n)-f(x_0)$. Для этой цели он на простых примерах, решаемых элементарно, показывает приложения формулы $\sum_{i=0}^{n}\Delta f(x_i)=f(x_n)-f(x_0)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, к суммированию рядов. Б. М. Гагаев

3260. Асимптотические разложения интегралов Френеля и родственных функций и возможность их использования при расчете специальных ракетных траекторий. Зборник (Asymptotische Entwicklungen für Fresnelsche Integrale und verwandte Funktionen und ihre Anwendungsmöglichkeiten bei der Berechnung spezieller Raketenbahnen. Zbornik Josef), Z. angew. Math. und Phys., 1954, **5**, № 4, 345—351 (нем.)

Для интеграла

$$J(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t}(k-i)t^{-1/2}\,dt$$

выводится асимптотическое разложение

$$J(x)=((\sin w)/2)^{1/2}e^{iw/2}-(1/\sqrt{2\pi})\,e^{-kx}x^{-1/2}\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{2m}{m}m!2^{-2m}\sin^{m+1}we^{[(m+1)w+x]i}x^{-m}+$$
$$+R_n(x),$$

где $w=\operatorname{arc\,ctg}k$,

$$R_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\binom{2n+2}{n+1}(n+1)!\,2^{-(2n+2)}\sin^{n+1}w\times$$
$$\times e^{(n+1)wi}\int_x^\infty e^{-t(k-i)}t^{-(2n+3)/2}\,dt.$$

Показывается, что при $0\leqslant k\leqslant 1$ точность $\pm 2\cdot10^{-4}$ достигается для $10\leqslant x\leqslant 20$, если взять четыре члена ряда, для $20<x$, если взять два члена. Приведена вспомогательная таблица величин w, $\lg\sin w$, $[\cos(w/2)][(\sin w)/2]^{1/2}$, $[\sin(w/2)][(\sin w)/2]^{1/2}$ для $k=0(0,1)1$.

Имеется значительное число опечаток, впрочем легко исправимых. М. К. Гавурин

3261. Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье). Джрбашян М. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, **18**, № 5, 427—448

Пусть $\varphi(v)$ — комплекснозначная функция такая, что

$$\int_0^\infty |\varphi(v)|\, v^{\mu\rho-1}\, dv < \infty,\ \rho \geqslant 1/2,\ 0 < \mu \leqslant \rho^{-1}. \qquad (1)$$

Обобщенным преобразованием Фурье автор называет преобразование

$$\Phi(z) = \sqrt{\rho/2\pi} \int_0^\infty \exp(-v^\rho z^\rho)\, \varphi(v)\, v^{\mu\rho-1} dv,$$

определяющее голоморфную в угле $|\arg z| < \pi/2\rho$ функцию. Основной результат работы заключается в доказательстве формулы обращения. Автор вводит функцию

$$G(w, \sigma, \rho, \mu) =$$

$$= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \{e^{-i\pi(1-\mu)/2} \int_0^{\sigma^{1/\rho}} \Phi(te^{i\pi/2\rho}) E_\rho(wte^{i\pi/2\rho}, \mu) \times$$

$$\times t^{\mu\rho-1}\, dt + e^{i\pi(1-\mu)/2} \int_0^{\sigma^{1/\rho}} \Phi(te^{-i\pi/2\rho}) \times$$

$$\times E_\rho(wte^{-i\pi/2\rho}; \mu)\, t^{\mu\rho-1}\, dt\},$$

где

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})},$$

и доказывает теорему:

Пусть функция $\varphi(v)$ непрерывна на полуоси $[0, \infty)$, имеет ограниченную вариацию на любом отрезке $[0, R]$, $0 < R < \infty$, и удовлетворяет условию (1). Тогда, если $u > 0$, то

а) при $\rho = 1/2$, $\mu = 1$, или при $\rho > 1/2$, $0 < \mu \leqslant \rho^{-1}$,

$$\lim_{\sigma \to \infty} G(u, \sigma, \rho, \mu) = \varphi(u);$$

б) при $\rho = 1/2$, $\mu = 1$ или при $\rho > 1/2$, $0 < \mu \leqslant 1$,

$$\lim_{\sigma \to \infty} G(0, \sigma, \rho, \mu) = \varphi(0)/2\rho;$$

в) при $\rho \geqslant 1$, $0 < \mu \leqslant \rho^{-1}$ для любого $w \neq 0$ при $|\arg w| \geqslant \pi/\rho$

$$\lim_{\sigma \to \infty} G(w, \sigma, \rho, \mu) = 0.$$

Указывается, что теорема дает аппарат для приближения функций, заданных на луче $(0, \infty)$, целыми функциями конечного порядка $\rho \geqslant 1/2$, тип которых стремится к бесконечности.

При $\rho = \mu = 1$ из теоремы вытекает известный факт об обращении интеграла Фурье. Построены обобщенные преобразования Фурье и обоснованы формулы обращения также в тех случаях, когда функция φ задана на двух лучах $\arg w = 0$, $\arg w = \pi/\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, или на p лучах, исходящих из начала координат под равными углами. Ю. И. Черский

3262. Новые применения функциональных уравнений. Редхеффер (Novel uses of functional equations. Redheffer R. M.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, **3**, № 2, 271—279 (англ.)

Некоторые физические закономерности выражаются формулами, которые представляют собой функциональные уравнения для неизвестных функций. Так, если r и t — коэффициенты отражения и пропускания одного диэлектрического слоя, а R и T — соседнего слоя, то коэффициенты, соответствующие совокупности слоев, будут

$$(r + (t^2 - r^2)R)/(1 - rR) \text{ и } tT/(1 - rR).$$

Считая, что эти слои одной и той же среды толщин x и y, приходим к системе функциональных уравнений

$$R(x+y) = \frac{R(x) + [T^2(x) - R^2(x)]\, R(y)}{1 - R(x)\, R(y)},$$

$$T(x+y) = \frac{T(x)T(y)}{1 - R(x)\, R(y)},$$

из которых можно вывести, что $R(x)$ является решением уравнения Риккати $R' = R_0'(1 + cR + R^2)$, где c — некоторая постоянная, а $R_0' = R'(0)$, и что $R'(x) = R_0' T^2(x)$. Другой физический вопрос приводит к функциональному уравнению $f(v, v') + f(v', v) = f(v + v', 0)$, для которого ищется решение, дробно-линейно зависящее от одного из аргументов. В. И. Левин

3263. О системах линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами. Чермак (O systémech lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty. Čermák Jiří), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 2, 141—150 (чеш.; резюме русс., нем.)

Исследуется система разностных уравнений

$$u_i(x+1) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)\, u_j(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$p_{ij}(x + \omega) = p_{ij}(x), \ \det|p_{ij}(x)| \neq 0.$$

Автор строит для разностных уравнений теорию, аналогичную классической теории Флоке для дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Характерной особенностью изложения является применение теории Вейра подобных матриц (см. РЖМат, 1955, 2662) вместо теории элементарных делителей Вейерштрасса. В. В. Немыцкий

3264. Об отсутствии рациональных решений у некоторых разностных уравнений. Олсон (The nonexistence of rational solutions for certain difference equations. Olson F. R.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 3, 179—181 (англ.)

Различными методами устанавливается (довольно очевидный факт), что уравнения

$$x^{-k} = F(x+1) \pm F(x) \quad (k = 1, 2, 3)$$

не имеют рациональных решений с комплексными коэффициентами. А. А. Миролюбов

3265. Механический смысл одного геометрически-разностного уравнения. Хан (Die mechanische Deutung einer geometrischen Differenzgleichung. Hahn Wolfgang), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 8—9, 270—272 (нем.)

Задача об отыскании собственных малых колебаний невесомой нити, на которой закреплены материальные точки, причем массы этих точек и расстояния между соседними точками образуют геометрические прогрессии с одним и тем же знаменателем $q < 1$ ($q > 0$), после введения соответствующих переменных приводится к решению уравнения

$$V(q^2x) + (\mu x - 2)\, V(qx) + V(x) = 0 \ (0 < x \leqslant 1;\ V(1) = 0).$$

Частные решения этого уравнения получаются в виде

$$V(x) \equiv v(\mu x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r q^{r(r-1)/2} \Big(\prod_{s=1}^{r} (1 - q^s)^{-2} (\mu x)^r,$$

где μ находится из уравнения $v(\mu) = 0$. Эти решения удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i\, v(\mu_m q^{i+1})\, v(\mu_n q^{i+1}) = 0 \ (m \neq n).$$

Рассматриваются и некоторые другие аналогичные задачи.

Опечатки: в формуле (3) вместо $f(q - x)$ должно быть $f(qx)$; в левой части формулы (4) надо переменить знак. А. Д. Мышкис

3266 к. Дифференциальное и интегральное исчисление для школ и университетов. Максуэлл (An analytical calculus for school and university. Maxwell E. A., v. 1, XII+165 pp., 15 s., v. 2, VII+272 pp., 18 s., v. 3, VII+195 pp., 15 s., Cambridge University press, 1954) (англ.)

Курс дифференциального и интегрального исчис-

ления облегченного типа, предназначенный для первых курсов университетов и для желающих ознакомиться с основами анализа. Изложение ведется языком, вполне доступным для начинающих. Имеется много примеров (решенных и нерешенных).

Содержание 1-го тома: Гл. 1. Идея дифференцирования. Гл. 2. Вычисление производных. Гл. 3. Применения понятия производной. Гл. 4. Идея интегрирования. Гл. 5. Методы интегрирования. Гл. 6. Применения понятия интеграла. Предметный указатель. Содержание 2-го тома: Гл. 7. Логарифмическая и показательная функции (дифференцирование и интегрирование). Гл. 8. Ряд Тейлора и связанные с ним вопросы. Гл. 9. Гиперболические функции (дифференцирование и интегрирование). Гл. 10. Кривые (параметрическое представление, длина, кривизна, огибающая, вычисление площади, ограниченной замкнутой кривой). Гл. 11. Комплексные числа. Гл. 12. Интегрирование рациональных, тригонометрических, показательных и т.п. функций (и их комбинаций). Гл. 13. Несобственные интегралы. Добавление: понятие о частной производной. Предметный указатель. Содержание 3-го тома: Гл. 14. Частные производные. Гл. 15. Максимум и минимум. Гл. 16. Якобианы. Гл. 17. Кратные интегралы. Гл 18. Построение графиков. Предметный указатель. М. К. Керимов

3267 II. Элементы теории функций. Рей - Пастор (Elementos de la teoria de funciones. Rey Pastor Julio. 3 ed., 560 p., Madrid, 1953, 125.00 pes.), Bibliogr. hispanica., 1954, **13**, № 7—8, 153 (библ.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

3268. Заметка об одном обобщении интегрального признака Коши — Маклорена. Ньютон (A note on a generalization of the Cauchy — Maclaurin integral test. Newton T. A.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 5, 331—334 (англ.)

Пусть $\{M_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел, причем $M_{n+1} = O(M_n)$ при $n \to \infty$, и пусть $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$ — убывающие последовательности положительных чисел. Доказывается:

1. Если $\sum_1^\infty c_n < \infty$ и $c_{M_n}(M_{n+1} - M_n)(n = 1, 2, \ldots)$ убывают, то $c_n = o[1/(n \ln n)]$.

2. Если $\sum_1^\infty c_n < \infty$, $\sum_1^\infty d_n = \infty$, то существует бесконечно много таких значений n, что при $M_n \leqslant m \leqslant M_{n+1}$ имеем $c_m < d_m$. А. А. Конюшков

3269. Обобщение арифметического тождества Конфорто. Серре (Generalizzazione di un'indentità aritmetica di Conforto. Segre Beniamino), Archimede, 1954, **6**, № 3, 100—106 (итал.)

Тождество Конфорто (Conforto F., Boll. Unione mat. ital., 1939, **1**, 75—80) имеет вид

$$2^{p-1}(2^p - 1) = \binom{2p+2}{p-1} + \binom{2p+2}{p-5} + \binom{2p+2}{p-9} + \ldots$$

(p — натуральное число).

Автор предлагает следующие обобщения:

$$\sum_{h=1}^{r} (2\cos(2h\pi/r))^n = r\sum_k \binom{n}{k},$$

$$\sum_{h=1}^{r} (2\sin(2h\pi/r))^n = r\sum_k (-1)^{k+[n/2]}\binom{n}{k},$$

причем суммирование справа подчинено условиям:

$$0 \leqslant k \leqslant n;\ 2k \equiv n \pmod r.$$

Тождество Конфорто получается из 1-го равенства при $r = 8$, $n = 2(p+1)$. В. Л. Гончаров

3270. О знакочередующихся рядах (Заметка 2279). Гай (On alternating series. (Note 2279). Guy Richard K.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 324, 138—139 (англ.)

Положим $S_m = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} u_n^m$, где $0 < u_n \to 0$. Автор строит примеры, показывающие, что из сходимости рядов S_1 и S_p $(p > 1)$ не вытекает сходимость ряда S_q, $q > p$. И. Е. Жак

3271. Некоторые бесконечные ряды. Сандем (Some infinite series. Sandham H. F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 430—436 (англ.)

Разлагая в ряд по рациональным дробям функции

$$1/(e^{2\pi x} - 1) \text{ и } e^{2\pi a x}/(e^{2\pi x} - 1)\ (0 < a < 1),$$

автор дает элементарный метод для вычисления сумм восьми бесконечных рядов, рассматривавшихся Рамануджаном (Hardy G. H., Seshu Aiyar P. V., Wilson B. M., The collected papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge, 1927, 326).

Вот две из доказанных автором формул:

$$\sum_{n=1}^\infty n^{4m+1}/(e^{2\pi n} - 1) = B_{4m+2}/4(2m+1),$$

$$\sum_{n=1}^\infty |\mathrm{cth}\,\pi n|/n^{4m-1} = -(2\pi)^{4m-1}(B + Bi)^{4m}/2(4m)!$$

где $(B + Bi)^{4m}$ представляет собой символическую степень относительно чисел Бернулли B_k, а m — некоторое натуральное число.

В формулах статьи имеется несколько опечаток. Г. Ф. Кангро

3272. Некоторые новые результаты об эквивалентных бесконечных произведениях. Слейтер (Some new results on equivalent products. Slater L. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, part 3, 394—403 (англ.)

Рассматриваются бесконечные произведения

$$\Pi\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_M; \\ b_1, b_2, \ldots, b_N; \end{bmatrix} q^k =$$

$$= \prod_{n=1}^\infty \frac{(1 - a_1 q^{kn-k})(1 - a_2 q^{kn-k}) \ldots (1 - a_M q^{kn-k})}{(1 - b_1 q^{kn-k})(1 - b_2 q^{kn-k}) \ldots (1 - b_N q^{kn-k})}$$

и устанавливаются некоторые формулы с подобными бесконечными произведениями. Эти тождества связаны с некоторыми вопросами теории модулярных, эллиптических и других специальных функций.

Даются также таблицы функции $1/\prod_{n=0}^\infty (1 - aq^n)$ для $a = -0{,}90\,(0{,}05)\,0{,}95$ и $q = 0\,(0{,}05)\,1{,}00$ в основном с 8 десятичными знаками (числа, большие 5, — с 8 значащими цифрами), причем восьмой десятичный знак не является надежным, и таблицы функции $1/\prod_{n=1}^\infty (1 - q^n)$ для $q = 0\,(0{,}005)\,0{,}890$ с 8 десятичными знаками. К. А. Семендяев

3273. Сумматорные приближения некоторых аналитических рядов. Данжуа (Approximation sommatoire de certaines séries analytiques. Denjoy Arnaud), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 89—94 (франц.)

Пусть $f(x)$ имеет производные до порядка p включительно; $f^0(x) = f(x)$, $f^m(x)$ — функция, имеющая своей производной $f^{m+1}(x)$, $h > 0$.

$$D_p[f(x), h] = \sum_{k=0}^{k=q} (-1)^k C_q^k f(x + h\,(q - k));$$

$$A_p[f(x), h] = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k C_p^k D_{p-k}[f^{-p+k}(x), h].$$

В статье показывается, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_p^k h^{-k} D_k [f^{-k}(x), h] + (-1)^p h^{-p} A_p [f(x), h]. \quad (1)$$

Пусть далее $u(x)$ имеет производные любого порядка, причем $(-1)^p u^p(x) > 0$ для $x \geqslant 1$; $p \geqslant 0$; $u^{-1}(x) = -\int_x^\infty u(t)\,dt$, $s = \sum_{n=1}^\infty u(n)$ сходится. Тогда тождество (1) дает:

$$S = H_p(u) + (-1)^p B_p(u), \quad (2)$$

где $H_p(u) = \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^k C_p^k D_{k-1}[u^{-k}(1), 1]$,

$$B_p(u) = \int_0^1 \dots \int_0^1 (1-t_1)\dots(1-t_p) \times \sum_{n=1}^{\infty} u^p(n + t_1 + \dots + t_p)\,dt_1 \dots dt_p,$$

причем $B_p(u) = o(1)$ при $p \to \infty$.

Тождество (2) прилагается далее к суммированию ряда $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$, причем в этом случае

$$H_p'(s) = H_p(n^{-s}) = \Gamma^{-1}(s) \int_0^\infty x^{s-1} (e^x - 1)^{-1} (1 - \xi(x))\,dx,$$

$$B_p'(s) = B_p(n^{-s}) = \Gamma^{-1}(s) \int_0^\infty x^{s-1} (e^x - 1)^{-1} \xi(x)\,dx,$$

где $\xi(x) = (1 - x^{-1}(1 - e^{-x}))^p$.

При $p \to \infty$ целая функция $(s-1) H_p'(s) \to (s-1)\zeta(s)$.

Автор отмечает, что $dH_p'(s)/ds$ имеет единственную особенность в точке $s = 0$. Н. Г. Чудаков

3274. Задача на суммирование. Гупта (A summation problem. Gupta Hansraj), Math. Student, 1954, 22, № 2, 105—107 (англ.)

Элементарно доказывается равенство

$$\sum_{r=0}^{n} 2^r \prod_{i=0}^{r-1} \frac{n-i}{2n-i} = 4^n \Big/ \binom{2n}{n}.$$

А. А. Конюшков

3275. Множители суммирования бесконечных рядов. Пати (The summability factors of infinite series. Pati T.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 2, 271—283 (англ.)

Абсолютное суммирование ряда методом Чезаро порядка k обозначается символом $|C, k|$. Ряд называется сильно суммируемым методом Чезаро порядка $k > 0$ или суммируемым $[C, k]$ к числу s, если $\sum_{\nu=1}^{n} |s_\nu^{k-1} - s| = o(n)$ при $n \to \infty$, где s_ν^{k-1} — чезаровские средние для данного ряда порядка $k-1$. Пусть $f(t) \in L(-\pi, \pi)$ — функция с периодом 2π, а $\sum (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum c_n(t)$ — ее ряд Фурье ($a_0 = 0$). Положим $\varphi(t) = [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]/2$. Доказываются следующие теоремы (и некоторые другие):

Теорема 1. Если $\{\lambda_n\}$ — выпуклая последовательность и ряд $\sum n^{-1}\lambda_n$ сходится, то ряд $\sum \lambda_n c_n(t)$ суммируется $|C, k|$ при $t = x$ и любом $k > 1$ при условии, что $\int_0^\tau |\varphi(u)|\,du = o(\tau)$, когда $\tau \to 0$. Эта теорема обобщает результаты Чжена (Min-Teh Cheng, Duke Math. J., 1948, 15, 17—27) и Идзуми и Кавата (Izumi S., Kawata T., Proc. Imperial Acad. (Tokyo), 1938, 14, 32—35).

Теорема 2. Пусть $0 < k \leqslant 1$, t_n^k — чезаровские средние порядка k для последовательности $\{na_n\}$. Если $\{\lambda_n\}$ — выпуклая последовательность и ряд $\sum n^{-1}\lambda_n$ сходится, а последовательность $\{\theta_n^k\}$, определяемая следующим образом: $\theta_n^k = |t_n^k|$ при $k = 1$, $\theta_n^k = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |t_\nu^k|$ при $0 < k < 1$, трансформируется методом $(C, 1)$ в ограниченную последовательность, то ряд $\sum \lambda_n a_n$ суммируется $|C, k|$.

Теорема 3 (получается из 2). Если $\sum a_n$ суммируется $[C, 1]$, а $\{\lambda_n\}$ — выпуклая последовательность и ряд $\sum n^{-1}\lambda_n$ сходится, то $\sum \lambda_n a_n$ суммируется $|C, 1|$.

В. М. Даревский

3276. Взаимоотношение между методами суммируемости Абеля и арифметических средних. Огиевецкий И. Е., Тр. Днепропетр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1954, № 24, 275—279

Теорема автора о методах (C, α, β) (РЖМат, 1954, 2207) доказывается при $\alpha = \beta = 0$. В. Г. Челидзе

3277. О суммировании двойных рядов. Жак И. Е., Тиман М. Ф., Матем. сб., 1954, 35(77), № 1, 21—56

Ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} \quad (1)$$

называется $|C, \alpha, \beta|$-суммируемым, $\alpha, \beta > -1$, если выполнены следующие условия:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha,\beta} + \sigma_{m-1,n-1}^{\alpha,\beta}| < \infty,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha,\beta}| < \infty \text{ при фиксированном } n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha,\beta}| < \infty \text{ при фиксированном } m,$$

где $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$ — суммы Чезаро (C, α, β).

Ряд (1) называется $|A|$-суммируемым, если функция $f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n$ имеет в области $(0 \leqslant x < 1;\ 0 \leqslant y < 1)$ ограниченное изменение по каждому из переменных при фиксированном другом переменном, а также ограниченное изменение в смысле Каратеодори, т. е.

$$\sup \{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_i, y_k) - f(x_{i+1}, y_k) - f(x_i, y_{k+1}) + f(x_{i+1}, y_{k+1})|\} < +\infty,$$

где $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m < 1$, $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n < 1$.

Доказываются следующие основные теоремы:

1. Если ряд (1) (C, α, β)-суммируем $(\alpha, \beta > -1)$ к числу s и при некоторых $\gamma > 0$, $\delta > 0$ таких, что $\gamma\delta \leqslant (\alpha+1)(\beta+1)$, выполняются условия: $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = o(m^\gamma)$, $m \to \infty$ при любом фиксированном n; $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = o(n^\delta)$, $n \to \infty$ при любом фиксированном m, то для любых $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$ имеет место равенство $\lim \sigma_{m,n}^{\alpha',\beta'} = s$, когда m и n, стремясь к ∞, удовлетворяют неравенствам

$$K_1(\alpha' - \alpha)\, n^{\delta/(\alpha+1)} \leqslant m \leqslant K_2(\beta' - \beta)^{-1} n^{(\beta+1)/\gamma}.$$

Функция $f(x, y)$, $(x, y) \in R_0 = [0, 2\pi;\ 0, 2\pi]$ принадлежит классу $H_{\alpha,\beta,p}^{\alpha',\beta'}$, $0 < \alpha, \beta, \alpha', \beta' \leqslant 1$, $1 < p \leqslant 2$, если в R_0 выполнены условия:

$$\{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h, y+\eta) - f(x+h, y-\eta) - f(x-h, y+\eta) + f(x-h, y-\eta)|^p\,dx\,dy\}^{1/p} < K h^\alpha \eta^\beta,$$

$$\{\int_0^{2\pi} |f(x+h, y) - f(x-h, y)|^p\,dx\}^{1/p} \leqslant K_2(y) h^{\alpha'},$$

$$\{\int_0^{2\pi} |f(x, y+\eta) - f(x, y-\eta)|^p\,dy\}^{1/p} \leqslant K_1(x) \eta^{\beta'},$$

где $K = \text{const}$, $K_1(x)$, $K_2(y) \in L[0, 2\pi]$.

2. Если $f(x, y)$ является функцией класса $H_{\alpha,\beta,p}^{\alpha',\beta'}$, $0 < \alpha, \beta, \alpha', \beta' \leqslant 1$, $1 < p \leqslant 2$, то ее двойной ряд Фурье будет суммируем $|C, -\alpha^*, -\beta^*|$, где $\alpha^* < \min(\alpha, \alpha') - p^{-1}$, $\beta^* < \min(\beta, \beta') - p^{-1}$.

3. Пусть $\{q_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty} (i = 1, 2, 3, 4)$ — последовательности положительных чисел такие, что $k^{-1}q_k^{(i)} > (k+1)^{-1}q_{k+1}^{(i)} \to 0$ при $k \to \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}(kq_k^{(i)})^{-1} < \infty$. Если коэффициенты двойного тригонометрического ряда $\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} A_{m,n}(x,y)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \rho_{m,n}^2 m^{1-2\alpha} n^{1-2\beta} q_m^{(1)} q_n^{(2)} < \infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{m,0}^2 m^{1-2\alpha} q_m^{(3)} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{0,n}^2 n^{1-2\beta} q_n^{(4)} < \infty, \text{ где } 0 < \alpha, \beta < 1/2,$$

то данный ряд суммируем $|C, \alpha, \beta|$ почти всюду.

4. Если $f(x, y)$ является функцией класса $H_{\alpha,\beta}^{\alpha',\beta'}$ (определение класса $H_{\alpha,\beta}^{\alpha',\beta'}$ дано в работе референта, см. Докл. АН СССР, 1946, 54, № 2, 117—120), то внутри R_0 двойной ряд Фурье функции $f(x, y)$ $|A|$-суммируем.

В. Г. Челидзе

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

3278. Обобщение формулы Диксона. Фьельстад (A generalization of Dixon's formula. Fjeldstad Jonas Ekman), Math. scand., 1954, **2**, № 1, 46—48 (англ.)

Методами интегрального исчисления доказывается равенство

$$\sum_{s=0}^{2m} (-1)^s \binom{2m}{s}\binom{2n}{n-m+s}\binom{2p}{p-m+s} = (-1)^m \frac{(m+n+p)!\,(2m)!\,(2n)!\,(2p)!}{(m+n)!\,(m+p)!\,(n+p)!\,m!\,n!\,p!}.$$

Формула Диксона получается из него при $m = n = p$.

А. А. Конюшков

3279. Об асимптотическом разложении функций Ханкеля для больших положительных значений аргумента и индекса. Лензе (Über die asymptotische Entwicklung der Hankelschen Funktionen für große positive Werte der Veränderlichen und des Zeigers. Lense J.). Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 1/2, 44—53 (нем., резюме англ., франц., русс.)

Методом перевала исследуется асимптотическое поведение функций Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$ при условии, что $x = \nu / \operatorname{ch}\alpha\,(\alpha > 0)$, $\nu \to \infty$.

Автор отмечает некоторые затруднения, связанные с оценкой остаточного члена в рассматриваемом случае, и предлагает два способа для их преодоления. Дается критика метода доказательства соответствующих асимптотических формул, принадлежащего Вейриху (Weyrich R., Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Leipzig, Berlin, Teubner B. G., 1937, 57).

Н. Н. Лебедев

3280. Об одном обобщении интегралов Френеля. Асенпейтия (Sobre una generalizacion de las integrales de Fresnel. Azpeitia A. G.), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, **13**, ser. 4, № 1, 2, 61—80 (исп., резюме франц.)

Функции

$$I_{2k}(z) = \int_0^z \cos\frac{\pi v^{2k}}{2}\,dv, \quad J_{2k}(z) = \int_0^z \sin\frac{\pi v^{2k}}{2}\,dv$$

выражаются через функцию

$$H_{2k}(z) = \frac{2kz^{2k-2}}{\Gamma(2k-1)/2k} \int_0 \frac{t^{2k-2}\,e^{-t^{2k}}}{1+(tz)^{2k}}\,dt.$$

Приводятся асимптотические разложения, в частности, значения

$$I_{2k}(\infty) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2k}} \Gamma\left(\frac{1+2k}{2k}\right)\cos\frac{\pi}{4k}, \quad J_{2k}(\infty) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2k}} \Gamma\left(\frac{1+2k}{2k}\right) \times \sin\frac{\pi}{4k},$$

ранее полученные Коуцким (Koutsky Z., Časop. mat. fys., 1950, 75D, 257—260).

В. И. Левин

3281. Об асимптотических представлениях цилиндрических функций. Петрашень Г. И., Смирнова Н. С., Макаров Г. И., Уч. зап. ЛГУ, 1953, 170, сер. матем. н., № 27, 7—95

Изучаются асимптотические разложения цилиндрических функций при комплексных значениях аргумента. Отправной точкой исследования служит представление основных цилиндрических функций (Ганкеля и Бесселя) в форме контурных интегралов Сонина — Зоммерфельда:

$$H_p^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{c_1(\varphi_0)} e^{z\,\mathrm{sh}\,w - pw}\,dw,$$

$$H_p^{(2)}(z) = \frac{-1}{\pi i}\int_{c_2(\varphi_0)} e^{z\,\mathrm{sh}\,w - pw}\,dw,$$

$$I_p(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0(\varphi_0)} e^{z\,\mathrm{sh}\,w - pw}\,dw,$$

где $c_1(\varphi_0)$ — контур, начало и конец которого расположены в точках $w = -\infty + i\varphi_0$, $w = \infty + i(\pi - \varphi_0)$, а $c_2(\varphi_0)$, $c_0(\varphi_0)$ — подобные контуры, соединяющие друг с другом соответствующие точки: $w = -\infty + i\varphi_0$, $w = \infty - i(\pi + \varphi_0)$; $w = \infty - i(\pi + \varphi_0)$, $w = \infty + i(\pi - \varphi_0)$. Переменная z предполагается комплексной $z = \rho \exp i\varphi$, где $\varphi_0 + \varepsilon - \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 - \varepsilon + \pi/2$.

Изучение асимптотических представлений цилиндрических функций ведется методом перевала. Для этого авторы сначала изучают расположение на комплексной плоскости w стационарных контуров, проходящие через основную седловую точку $w_0 = \gamma = \alpha + i\beta$ $(0 < \beta \leqslant \pi)$. Уравнение этих стационарных контуров будет

$$\operatorname{Im} zf(w) = \operatorname{Im} zf(\gamma), \tag{1}$$

где $f(w) = w\operatorname{ch}\gamma - \operatorname{sh} w$ $(\operatorname{ch}\gamma = p/z)$. Затем производится асимптотическая оценка интегралов

$$S_p^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{(\lambda_0)} e^{-zf(w)}\,dw, \qquad S_p^{(2)}(z) = \frac{-1}{\pi i}\int_{(\lambda_0^+)} e^{zf(w)}dw,$$

распространенных по взаимно перпендикулярным стационарным контурам (1). Оценка дает формулы

$$S_p^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{p\pi}}\,(s^2-1)^{-1/4} \times \exp i\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) G_p\left(ip\sqrt{s^2-1}\right)$$

$$S_p^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{p\pi}}\,(s^2-1)^{-1/4} \times \exp i\left(\frac{\pi}{4} - \eta\right) G_p\left(-ip\sqrt{s^2-1}\right),$$

где $\eta = p[\sqrt{s^2-1} - \arccos(1/s)]$, $s = z/p$, а $G_p(x)$ — асимптотический ряд

$$G_p(x) = 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x} - \frac{5p^2}{3x^3}\right) + \frac{1\cdot 3}{8^2}\left[\frac{3}{2x^2} - \frac{77p^2}{9x^4} + \frac{385p^4}{54x^6}\right] + \ldots$$

В дальнейшем авторы подробно изучают различные виды стационарных контуров, проходящих через седловую точку как в случае

$$-\pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/4, \tag{2}$$

так и в случае

$$\pi/4 < \arg z < 3\pi/4. \tag{3}$$

Если выполняются неравенства (2), то следует брать уравнение стационарного контура в форме $\operatorname{Im} f(w) = \operatorname{Im} f(\gamma)$, что соответствует уравнению (1) при вещественных z.

Если же аргумент z удовлетворяет условию (3), то уравнение контура, проходящего через седловину, следует брать в виде $\operatorname{Re} f(w) = \operatorname{Re} f(\gamma)$, что соответствует уравнению (1) при чисто мнимых значениях z.

Н. С. Кошляков

3282. Употребительные эллиптические интегралы и функции. Казнав (Intégrales et fonctions elliptiques usuelles. Cazenave René), Ann. télécommuns, 1954, **9**, № 4, 103—108 (франц.)

В § 1 приведена сводка основных фактов, относящихся к эллиптическим интегралам и функциям. В § 2 эллиптический интеграл первого рода трактуется как удвоенная площадь сектора, ограниченного линией $\rho\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 1$ (ρ, φ — полярные координаты), полярной осью и радиусом-вектором точки указанной линии, составляющим угол φ с полярной осью. Аналогичное толкование дается и для эллиптического интеграла второго рода. В § 3 указывается геометрическая интерпретация эллиптических функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$, связанная со спиралью Зейферта на единичной сфере.

М. Н. Олевский

3283. К асимптотике вырожденных гипергеометрических функций. Трикоми (Zur Asymptotik der konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Tricomi F. G.), Arch. Math., 1954, **5**, № 4—6, 376—384 (нем.)

Рассматривается асимптотическая оценка вырожденной гипергеометрической функции

$$\Phi(a, c; x) = {}_1F_1(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

при больших значениях $\varkappa = (c - 2a)/2$.

Применяется метод перевала к интегральному представлению

$$e^{-x/2}\Phi(a, c; x) = -\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-a)}{2^c\pi i\Gamma(c-a)} e^{-a\pi i}\oint_C e^{-xz/2} \times \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\varkappa}(1-\tfrac{1}{4}z^2)^{(c-2)/2}\,dz,$$

где через C обозначен замкнутый контур в z-плоскости, заключающий в себе точку $z = 1$.

Рассматриваются три случая:

1) $0 < x < 4\varkappa$; тогда $e^{-x/2}\Phi(a, c; x) =$

$= \{\Gamma(c)(2\varkappa\cos\vartheta)^{1-c}/\sqrt{\pi\varkappa\sin 2\vartheta}\}[\sin\Theta^* + O(\varkappa^{-1})]$,

$\vartheta = \arccos\sqrt{x/4\varkappa}$, $\Theta^* = \varkappa(2\vartheta - \sin 2\vartheta) + (1-4a)\pi/4$;

2) $x = 4\varkappa$; тогда $e^{-x/2}\Phi(a, c; x) =$

$= (\Gamma(c)/\pi)\,3^{1/3}(2\varkappa)^{-c+2/3}[A_1(t)\cos a\pi + A_2(t)\sin a\pi + O(\varkappa^{-2/3})]$,

$$A_1(t) = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{t}{3}}\left\{J_{-1/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right] + J_{1/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right]\right\},$$

$$A_2(t) = \frac{\pi}{3}\sqrt{t}\left\{J_{-1/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right] - J_{1/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right]\right\};$$

3) $x > 4\varkappa$; тогда $e^{-x/2}\Phi(a, c; x) =$

$$= \Gamma(c)\sin a\pi\frac{(2\varkappa\operatorname{ch}\vartheta)^{1-c}}{\sqrt{\pi\varkappa\operatorname{sh}2\vartheta}}\exp[\varkappa(\operatorname{sh}2\vartheta - 2\vartheta)][1+O(\varkappa^{-1})].$$

Н. С. Кошляков

3284. Обобщения формулы Неймана для $Q_n(y)$. Тхосар (Generalisations of Neumann's formula for $Q_n(y)$. Thosar Yeshwant V.), Math. Z., 1954, **60**, № 1, 52—60 (англ.)

Дифференцируя обе части известного разложения $(y-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)Q_n(y)$ по x m раз, по y r раз и используя свойства ортогональности функций $P_n^m(x)$, автор находит следующую формулу для присоединенной функции Лежандра 2-го рода

$$Q_n^r(y) = \frac{(-1)^r}{2}(m+r)!\frac{(n-m)!}{(n+m)!}(y^2-1)^{r/2} \times \times \int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{m/2}P_n^m(x)}{(y-x)^{r+m+1}}\,dx,$$

$y > 1$, m, n и r — целые числа, удовлетворяющие условиям: $n \geqslant m \geqslant 0$, $r \geqslant -m$. При $r = -m$ она была отмечена Гормли (Gormley P. G., J. London Math. Soc., 1934, **9**, 149—152); при $r = m = 0$ она обращается в известную формулу Неймана. Элементарным же путем получены суммы следующих рядов (при указанных выше предположениях об m, n и r):

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)Q_n^p(y)Q_n^r(y)$$

при $p = 0$, $p = m$, $p = r$,

$$\sum_{n=s}^{\infty}(2n+1)Q_n^m(y)Q_n^p(y)$$

при $p = r$, $s = m$; $p = s = 0$; $p = m$, $s = 0$.

В качестве примера приведем следующий результат:

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)Q_n^m(y)Q_n^r(y) = = (-1)^{m+1}\frac{2^m m!\,(2m)!\,(r+m)!}{(r+3m+1)!}(y^2-1)^{-(m+1)/2} \times \times Q_m^{r+2m+1}(y).$$

В заключение автор указывает, что все результаты статьи справедливы не только для действительных значений y, бо́льших единицы, но и вообще для всех y, не принадлежащих отрезку $[-1, 1]$ действительной оси.

М. Н. Олевский

3285 К. Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2. Эрдейи, Магнус, Оберхеттингер, Трикоми (Higher transcendental functions. Erdélyi Arthur, Magnus Wilhelm, Oberhettinger Fritz, Tricomi Francesco G. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953, v. 1, XXVI+302 pp, 6.50 doll.; v. 2, XVII+396 pp., 7.50 doll.) (англ.)

Проф. Бейтманом (Bateman) был задуман обширный проект создания справочника по высшим трансцендентным функциям, который остался незаконченным (РЖМат., 1953, 540). Авторы реферируемого справочника частично использовали материалы, оставленные Бейтманом. В книге весьма четко изложены вопросы, связанные с теорией и практикой специальных функций. Те главы, где излагается материал, по которому имеются хорошие источники (например, глава о бесселевых функциях), имеют конспективный характер. Изложение сопровождается многочисленными ссылками на литературу (книжную и журнальную).

Приведем перечень глав с их краткой характеристикой.

Содержание тома I.

1. Гамма-функция (Г (*z*)). Определение Г (*z*); функциональные уравнения и бесконечные суммы, связанные с Г (*z*); бета-функция; выражение гамма- и бета-функций через контурные интегралы; логарифмическая производная Г (*z*) и ее интегральное представление; ряды Куммера для lg Г (*z*); обобщенные дзета-функции; дзета-функции Римана; числа и полиномы Бернулли и Эйлера и связанные с ними интегральные формулы; некоторые разложения для lg Г (1+*z*), Г (*z*); асимптотические разложения, интегралы Меллина — Барнса. Библиография 39 названий.

2. Гипергеометрические функции. Ч. 1. Теория. Гипергеометрические ряды; гипергеометрическое уравнение; основные интегральные представления; аналитическое продолжение гипергеометрических рядов; случай вырождения гипергеометрического уравнения; асимптотические разложения; произведение гипергеометрических рядов; особые случаи гипергеометрической функции; уравнение Римана и т. п. Ч. 2. Формулы. Библиография, 58 названий.

3. Функции Лежандра. Уравнение Лежандра; соотношения, связывающие функции Лежандра, полиномы Лежандра; интегральные представления, асимптотические разложения; поведение функций Лежандра вблизи особой точки; теоремы сложения; интегралы, содержащие функции Лежандра; функции Гегенбауера.

4. Обобщенные гипергеометрические ряды.

5. Дальнейшие обобщения гипергеометрических функций. *E*-функции Макроберта (MacRobert); *G*-функции Мейера (Meijer); гипергеометрические функции нескольких переменных.

6. Вырожденные гипергеометрические функции. Дифференциальные уравнения; основные интегральные представления; фундаментальная система решений вырожденного уравнения; функции Уиттекера; функции Бесселя; преобразование Лапласа и вырожденные гипергеометрические функции; разложения по многочленам Лагерра и функциям Бесселя; теоремы умножения; ряды; интегралы; корни; произведения вырожденных гипергеометрических функций. Библиография, 91 название.

Предметный указатель. Указатель обозначений. Содержание тома 2. (Нумерация глав продолжается).

7. Бесселевы функции. Ч. 1. Теория. Исторические сведения, обозначения; уравнение Бесселя; функции Кельвина; функции Бесселя целого порядка, произведения бесселевых функций; дифференциальные и рекуррентные соотношения, связанные с бесселевыми функциями, интегральные представления бесселевых функций (представления Ганкеля, Шлефли, Сонина и т. д.), интегралы Зоммерфельда, Барнса, Эйри; асимптотические разложения бесселевых функций, полиномы Неймана, Ломмеля; функции Ангера — Вебера; функции Струве; функции Ломмеля; теоремы сложения Гегенбауера, Графа; некоторые интегральные формулы с бесселевыми функциями, разрывные интегралы Вебера; интегралы Сонина, Гегенбауера и их обобщения; формулы Макдональда и Никольсона, соотношения между функциями Бесселя и Лежандра; нули бесселевых функций; ряды Неймана и Шлёмильха, Фурье — Бесселя и Дини; интеграл Харди и его обобщения, парные интегральные уравнения, содержащие бесселевы функции. Ч. 2. Формулы. На 28 страницах приведены всевозможные формулы, связанные с бесселевыми функциями. Библиография, 264 названия.

8. Функции параболического цилиндра и параболоида вращения. Функции параболического цилиндра (функции Вебера—Эрмита), интегральные представления, асимптотические разложения; нули; функции параболоида вращения; интегралы и ряды, связанные с ними. Библиография, 44 названия.

9. Неполные гамма-функции и связанные с ними функции. Определения, свойства, интегральные представления; ряды; асимптотические разложения; нул специальные неполные гамма-функции; интегральны синус и косинус, интеграл ошибок, интегралы Фр неля. Библиография, 24 названия.

10. Ортогональные многочлены. Системы ортог нальных функций; проблема приближения функци свойства ортогональных многочленов; механически квадратуры; непрерывные дроби; классические мног члены (Лежандра или сферические, Гегенбауера и ультрасферические, Якоби или гипергеометрически Эрмита, Лагерра, Чебышева), нули указанных мног членов, некоторые неравенства, проблемы разложени по этим многочленам; многочлены С. Н. Бернштейн Сегё и др. Библиография, 105 названий.

11. Сферические и гиперсферические гармонически многочлены. Векторы, многочлены Гегенбауера; га монические многочлены; поверхностные гармоники теорема сложения; образующая функция для повер ностных гармоник в трехмерном случае; формула пр образования для сферических гармоник. При написани этой главы были использованы неопубликованные р зультаты Г. Герглотца. Библиография, 30 названий

12. Ортогональные многочлены от нескольких п ременных. Свойства ортогональных многочленов двух переменных, ортогональные многочлены, опр деленные в треугольной, круговой и сферической об ластях; проблемы разложения; многочлены Эрмита нескольких переменных, их основные свойства и други вопросы. Библиография, 55 названий.

13. Эллиптические функции и интегралы. Ч. 1. Эл липтические интегралы. Определение и основные свой ства; периоды и особенности эллиптических интегралов вычисление эллиптических интегралов Лежандра полные эллиптические интегралы. Ч. 2. Эллиптиче ские функции. Обращение эллиптических интегра лов; функции с двойным периодом; общие свойств эллиптических функций; функции Вейерштрасса их свойства; выражение эллиптических функций и ин тегралов через функции Вейерштрасса; эллиптически функции Якоби и их свойства; тета-функции; выраже ние эллиптических функций и интегралов через тета функции; теория пребразований эллиптических функ ций; эллиптические модулярные функции; конформны преобразования. Библиография, 33 названия.

Предметный указатель и указатель обозначений

М. К. Керимо

3286 К. Справочник по эллиптическим интегралам для инженеров и физиков. Берд, Фридман (Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Byrd Paul F., Friedman Morris D., XII+355 p., Springer-Verlag, Berlin—Göttingen— Heidelberg, 1954) (англ.)

Книга содержит около 3000 интегралов и формул связанных с эллиптическими интегралами. Каждая гла ва начинается с определений и краткого теоретическог введения, далее указываются пределы изменения модул и аргумента интегралов, особые значения для интегра лов, формулы сложения и т. п. В конце книги даны таб лицы эллиптических интегралов и некоторые други таблицы, а также библиография (около 40 названий и предметный указатель.

Материал расположен в следующем порядке: эллипти ческие интегралы; эллиптические функции Якоби обратные эллиптические функции Якоби; дзета-функци Якоби; лямбда-функции Неймана; приведение интегра лов от алгебраических подинтегральных функций эллиптическим функциям Якоби; приведение интегра лов от тригонометрических подинтегральных функций к эллиптическим функциям Якоби; таблицы интегралов от эллиптических функций Якоби и обратных эллиптических функций Якоби; эллиптические интегралы третьего рода; таблицы различных эллиптических ин-

егралов, содержащих тригонометрические или гипер-олические подинтегральные функции (случай обычных кратных интегралов); эллиптические интегралы, свя-анные с преобразованием Лапласа; гиперэллиптические нтегралы; интегралы от эллиптических интегралов случай, когда переменной интегрирования является одуль или аргумент); дифференцирование эллипти-еских интегралов (по модулю или по аргументу); эллиптические интегралы с постоянными пределами нтегрирования; разложение эллиптических интегралов эллиптических функций Якоби в ряды.

В качестве дополнения излагается теория эллипти-еских функций Вейерштрасса, тета-функций и т. п.

М. К. Керимов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3287. Об одном обобщении преобразования Эфроса. Шилькрут Д. И., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 5, 627—630

Доказывается теорема: Если $F(p, \lambda, \mu, \ldots)$ представляет изображение функции $\varphi(t, \lambda, \mu, \ldots)$, т. е. $F(p, \lambda, \mu, \ldots) \doteqdot \varphi(t, \lambda, \mu, \ldots)$, то при некоторых ограничениях, накладываемых на поведение введенных в рассмотрени функций,

$$u(p)\,F[p, \delta(p), \varepsilon(p), \ldots] \doteqdot \Phi(t) =$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\,\frac{e^{pt}}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{dp}{p^2}\,u(p)\int\limits_0^{\infty}\varphi[\tau, \delta(p), \varepsilon(p), \ldots]\,e^{-p\tau}\,d\tau.$$

В качестве примера по изображению $p/(p+\lambda) \doteqdot e^{|\lambda t}$ найдена начальная функция

$$\Phi_\nu(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\nu-1}(t-\tau)^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)}\,d\tau \doteqdot \frac{p}{(p+\ln p)^\nu}.$$

Указывается, что теорема может быть применена при сведении интегро-дифференциальных уравнений движения наследственной теории упругости к решению соответствующей задачи динамики упругого тела.

А. И. Лурье

3288. Интегральные преобразования функции двух переменных. Тиман М. Ф., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, 15, № 3, 135—142

Автор вводит понятия (C,α,β)-интегрируемости и A-интегрируемости функции двух переменных.

Функция $f(u, v)$ называется (C,α,β)-интегрируемой $(\alpha, \beta > -1)$ на $(0, +\infty;\ 0, +\infty)$, если функция

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x, y) = x^{-\alpha}y^{-\beta}\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(u, v)\,(x-u)^\alpha\,(y-v)^\beta\,du\,dv$$

конечна при любых $x > 0$, $y > 0$ и имеет предел при $x \to +\infty$, $y \to +\infty$.

Функция $f(x, y)$ называется A-интегрируемой на $(0, +\infty;\ 0, +\infty)$, если функция

$$A(u, v) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(x, y)\,e^{-ux}e^{-vy}\,dx\,dy$$

конечна при любых $u > 0$, $v > 0$ и имеет предел при $u \to 0$, $v \to 0$.

Теоремы:

1. Для класса функций $f(u, v)$, для которых $\left|\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(u, v)\,du\,dv\right| \leqslant M$ (равномерно относительно $x > 0$, $y > 0$), (C, α, β)-интегрируемость $(\alpha, \beta > 0)$ и A-интегрируемость эквивалентны.

2. Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям:

$$\lim_{x,\,y\to\infty}\varphi_{\alpha,\beta}(x, y) = I, \qquad (1)$$

$\varphi_{\alpha,\beta}(x, y) = o(x^\gamma)$ при любом фиксированном y, (2)

$\varphi_{\alpha,\beta}(x, y) = o(x^\delta)$ при любом фиксированном x, (3)

где $\alpha, \beta > -1$, $\gamma, \delta > 0$, $\gamma\delta \leqslant (\alpha+1)(\beta+1)$, то для любых $\alpha' \geqslant \alpha$, $\beta' \geqslant \beta$ $\lim\limits_{x,\,y\to\infty}\varphi_{\alpha',\beta'}(x, y) = I$, где x, y стремятся к $+\infty$, удовлетворяя условию

$$K_1(\alpha'-\alpha)\,y^{\delta/(\alpha+1)} \leqslant x \leqslant K_2(\beta'-\beta)^{-1}\,y^{(\beta+1)/\gamma}.$$

3. Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям (1), (2), (3) и функция $A(u, v)$ конечна при любых $u > 0$, $v > 0$, то $\lim\limits_{u,\,v\to 0}A(u, v) = I$, где u, v стремятся к нулю, удовлетворяя условию $K_1 v^{(\beta+1)/\gamma} \leqslant u \leqslant K_2 v^{\delta/(\alpha+1)}$.

Указанные теоремы являются распространением на суммирование двойных интегралов некоторых результатов, относящихся к суммированию двойных числовых рядов (см. реф. 3277).

И. Е. Жак

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3289. Об одном функциональном уравнении теплопроводности. Вундт (Über eine Funktionalgleichung aus der Wärmeleitung. Wundt Hermann), Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, № 2, 172—175 (нем.; резюме англ.)

Для составления номограммы функции $\Delta t_m = (\Delta t_1 - \Delta t_2)/\ln(\Delta t_1/\Delta t_2)$, важной в теории теплопроводности, ищутся непрерывные решения функционального уравнения $f((x_1 - x_2)/\ln(x_1/x_2)) = [f(x_1) + f(x_2)]/2$ $(x_1, x_2 > 0)$. Сначала доказано, что все непостоянные решения этого уравнения монотонны (доказательство этого неполно — *прим. реф.*) и выпуклы или вогнуты, причем $f(+0) = \pm\infty$. Затем, в предположении дифференцируемости функции f, показано, что решения имеют общий вид:

$$f(x) = A\int\limits_1^x [(\ln\xi + \xi^{-1} - 1)/(\xi - \ln\xi - 1)]\,d\xi + B.$$

Примечание референта. Из рассмотрения правых производных следует, что предположение о дифференцируемости функции f излишне. Равенство на стр. 173, строчка 7 снизу, должно иметь вид:

$$\lim_{x_1,\,x_2\to\infty}\left(x_M - \frac{x_1+x_2}{2}\right) = 0.$$

А. Д. Мышкис

3290. О сходимости некоторых интегралов теории потенциала. Дени (Sur la convergence de certaines intégrales de la théorie du potentiel. Deny Jacques), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 367—370 (франц.)

Рассматривается интеграл

$$\int i(t)\,\mathrm{grad}_x\,h(x-t)\,dt, \qquad (1)$$

распространенный по m-мерному пространству R^m; $i(t)$ — вектор, α-я степень абсолютной величины которого $(1 \leqslant \alpha \leqslant 2)$ суммируема в R^m, а $h(x) = |x|^{2-m}$ при $m > 2$; $= -\ln|x|$ при $m = 2$.

Вводятся определения: 1) α-емкостью множества называется его емкость по отношению к потенциалу $|x|^{\alpha-m}$ (по отношению к потенциалу $-\ln|x|$, если $\alpha = m = 2$); 2) функция $F(x)$ обладает свойством (P_α), если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое открытое множество ω с α-емкостью меньшей ω, что на дополнении к ω функция $F(x)$ непрерывна.

Основным результатом статьи является теорема: Множество точек, в которых интеграл (1) не является абсолютно сходящимся, имеет внешнюю α-емкость, равную нулю; интеграл (1) обладает свойством (P_α).

С. Г. Михлин

См. также: 2989, 2992, 3063, 3141, 3187, 3218 К, 3292, 3294, 3296, 3359, 3404, 3426, 3445, 3447

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

3291. Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Успехи матем. наук, 1953, 8, № 6, (58), 3—54

Дальнейшее развитие теории «обобщенных функций» или «распределений» и обобщенных преобразований Фурье (Соболев С. Л., Матем. сб., 1936, **1 (43)**, № 1, 39—71; Schwartz L., Théorie des distributions, t. t. I, II, Actualités scient. et industr., № 1091, 1122, Paris, 1950, 1951). На этой основе область функций, в которой обеспечена единственность решения задачи Коши для линейных систем уравнений с частными производными с коэффициентами, зависящими только от t, расширяется до ее естественных границ.

В главе I рассматриваются различные пространства «основных функций» — т. е. бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x_1, \ldots, x_N) = \varphi(x)$, которые при $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2} \to \infty$ стремятся к нулю вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $1/|x|$. Кроме пространств K основных функций, обращающихся в нуль вне конечных областей, и S всех основных функций (рассматривавшихся еще Л. Шварцем), вводятся три новых класса пространств: 1) K_p $(p>1)$— пространство бесконечно дифференцируемых функций экспоненциального порядка убывания не ниже p, т. е. удовлетворяющих вместе со всеми своими производными неравенствам вида $|\varphi(x)| \leqslant C_1 \exp(-C|x|^p)$; 2) $Z^p (p \geqslant 1)$— пространство функций интегрального роста $\leqslant p$, т. е. пространство целых аналитических функций от $z = x + iy = (x_1 + iy_1, \ldots, x_N + iy_N)$, удовлетворяющих для любого полинома $P(z)$ неравенству вида

$$\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} |P(z)\varphi(z)|^2\, dx < C_1 \exp(C|y|^p);$$

3) Z_p^p $(p>1)$ — пространство целых функций, имеющих по каждому аргументу экспоненциальный порядок роста не выше p, а по его вещественной части — экспоненциальный порядок убывания не ниже p. Пространства аналитических основных функций введены в реферируемой работе впервые. В каждом из перечисленных пространств определяется сходимость последовательностей, по отношению к которой оно оказывается полным, а операции дифференцирования и умножения на независимые переменные — непрерывными. Такие пространства основных функций называются основными. Вопрос об их топологизации не рассматривается. Преобразование Фурье $\psi(s) = \tilde{\varphi}(s) = \int e^{-2\pi i(s,x)} \varphi(x)\, dx$, $(s,x) = s_1x_1 + \ldots + s_Nx_N$, основной функции $\varphi(x)$ также есть основная функция. Преобразования Фурье всех элементов основного пространства Φ образуют «двойственное» к нему пространство $\tilde{\Phi}$. Основные результаты главы I: $\tilde{S} = S$, $\tilde{K} = Z^1$, $\tilde{Z}^1 = K$, $\tilde{K}_p = Z^{p'}$, $\tilde{Z}^p = K_{p'}$, $\tilde{Z}_p^p = Z_{p'}^{p'}$, где $p^{-1} + p'^{-1} = 1$; вывод последнего результата опирается на теорему Фрагмена—Линделёфа.

В главе II рассматриваются «обобщенные функции», определяемые как линейные функционалы (T, φ) на основных пространствах, непрерывные относительно введенной там сходимости. Функционал «типа функции» $(T, \varphi) = \int T(x)\varphi(x)\, dx$ в пространствах K, S, K_p и Z_p^p однозначно определяет порождающую его функцию $T(x)$ и отождествляется с ней. Совокупность всех обобщенных функций на основном пространстве Φ обозначается $T(\Phi)$. Операции над функциями основного пространства естественным образом распространяются на обобщенные функции. В частности, каждой обобщенной функции $T \in T(\Phi)$ отвечает «преобразование Фурье» $\tilde{T} \in T(\tilde{\Phi})$, определяемое формулой $(\tilde{T}, \tilde{\varphi}(s)) = (T, \varphi(-x))$; в случае $T = T(x)$ оно совпадает с обычным преобразованием Фурье функции $T(x)$. При преобразовании Фурье дифференцирование по x_j в $T(\Phi)$ переходит в умножение на $2\pi i s_j$ в $T(\tilde{\Phi})$ (в статье ошибка: $-2\pi i s_j$). Так как любую функцию, интегрируемую во всякой конечной области, можно считать принадлежащей $T(K)$, то оказывается, что любая такая функция, как бы быстро она ни росла, обладает преобразованием Фурье, а именно, принадлежащим $T(\tilde{K}) = T(Z^1)$. В конце главы II дается описание преобразований Фурье целых функций экспоненциального типа, обобщающее теорему Винера—Пэли.

В главе III полученные результаты применяются к исследованию единственности задачи Коши для систем вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, t\right) u(x,t), \qquad (1)$$

где $u(x,t) = \{u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t)\}$ — искомая вектор-функция точки $x = (x_1, \ldots, x_N)$ и времени t, а $P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, t\right)$ — матрица m-го порядка, элементами которой служат полиномы максимальной степени p от операторов дифференцирования по переменным x_j с коэффициентами, зависящими только от t. Нормальная фундаментальная система $Q(s, t_0, t)$ решений двойственной системы уравнений $dv(s,t)/dt = P(s,t)v(s,t)$, единичной матрицей начальных данных при $t = t_0$, состоит из целых по s функций максимального порядка роста $p_0 \leqslant p$ («приведенный порядок» системы (1)). Доказывается, что решение системы (1), удовлетворяющее при $t \geqslant 0$ условию

$$|u(x,t)| \leqslant C_1 \exp(C|x|^{p_0'-\varepsilon}), \qquad (2)$$

определяется единственным образом по своему начальному значению $u(x, 0)$. Класс «регулярных» систем выделяется условием, чтобы матрица $Q(s, t_0, t)$ в каждой полосе $|\tau| < \tau_0$ удовлетворяла неравенству вида

$$\|Q(s, t_0, t)\| \leqslant B_1 \exp(B|\tau|^{p_0})(1 + |s|)^q$$

с фиксированным $q \geqslant 0$. Для регулярных систем показатель $C|x|^{p_0'-\varepsilon}$ в (2) может быть заменен на $\varepsilon|x|^{p_0'}$.

Чтобы дать некоторое представление о методе доказательства, рассмотрим уравнение $\partial u/\partial t = a(2\pi)^{-2}\partial^2 u/\partial t^2$ (где a — любое комплексное число). В классе функций $u(x,t)$, удовлетворяющих при каждом $t \geqslant 0$ неравенству $|u(x,t)| \leqslant C_1 \exp(C|x|^{2-\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$, это уравнение может иметь не более одного решения, удовлетворяющего заданному начальному условию $u(x, 0) = u_0(x)$.

Доказательство основывается на том, что предполагаемое решение $u(x,t)$ рассматривается как линейный функционал на Z_p^p, где $2 - \varepsilon < p < 2$. Поэтому оно обладает «преобразованием Фурье» $v(s,t) \in T(\tilde{Z}_p^p) = T(Z_{p'}^{p'})$, где $p' > 2$, причем обобщенная функция $v(s,t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $dv/dt = -as^2v$. Пусть $\psi(s) \in Z_{p'}^{p'}$. Тогда и $\exp(as^2t)\psi(s) \in Z_{p'}^{p'}$ ($\exp(as^2t)$ — «мультипликатор» в $Z_{p'}^{p'}$ для каждого $t \geqslant 0$). Поэтому $\exp(as^2t)v(s,t)$ есть обобщенная функция в $Z_{p'}^{p'}$, определенная формулой $(\exp(as^2t)v, \psi) = (v, \exp(as^2t)\psi)$. Но $(\exp(as^2t)v)_t' = 0$. Следовательно, $\exp(as^2t)v(s,t) \equiv c = v(s,0)$. Поэтому, если $u(x,0) \equiv 0$,

т. е. $v(s, 0) \equiv 0$, то $\exp(as^2t)\, v(s, t) \equiv 0$ для всех t, откуда $v(s, t) \equiv 0$, т. е. $u(x, t) \equiv 0$. Аналогичные теоремы единственности получаются как частные случаи общей теоремы и для уравнения квантовой механики $\partial u/\partial t = i\Delta u$ и уравнения теории упругости $\partial u/\partial t = -\partial^4 u/\partial x^4$.

Д. А. Райков

3292. Мультипликативно-сверточная формула для распределений и замкнутые линейные оболочки сдвигов. Эдуардс (The exchange formula for distributions and spans of translates. Edwards R. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 888—894 (англ.)

Мультипликативно-сверточная формула для распределений в смысле Л. Шварца ($\sim$ означает преобразование Фурье) имеет вид

$$\widetilde{a * b} = \tilde{a} \cdot \tilde{b}. \qquad (1)$$

Самим Шварцем (Schwartz L., Théorie des distributions, vol. 2, 124) она была доказана в предположениях $b \in T(S)$, $\tilde{a}$ — медленно возрастающая функция. Автор приводит ряд других условий справедливости этой формулы, общая схема которых такова: предполагается, что возможно разумным образом определить произведение $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$ и что выполняются предельные соотношения $(r_n a) * b \to a * b$ и $(\tilde{r}_n * \tilde{a})\,\tilde{b} \to \tilde{a} \cdot \tilde{b}$, где r_n — регуляризующая («дельта-образная») последовательность финитных бесконечно дифференцируемых функций; тогда формула (1) получается путем перехода к пределу от случая Шварца. Указанные условия выполняются, например, в следующих случаях: а) $a = f \in L^p(R^m)$ $(1 \leqslant p < 2)$, $b = \varphi \in L^{p'}(R^m)$, $\tilde{f} \in E^{k_{mp}}$ (т. е. k_{mp} раз непрерывно дифференцируема; k_{mp} — фиксированная постоянная, превосходящая m/p или, при $p = 1$, превосходящая $m/2$); б) $a = f \in L^p(R^m)$ $(2 \leqslant p < \infty)$, $\varphi \in L^{p'}(R^m)$, $\tilde{f}$ локально принадлежит $L^{p'}$; в) $a = f \in C_0$ (непрерывная функция, стремящаяся к нулю на бесконечности), $b = \mu$ — ограниченная мера, $\tilde{f}$ — любая мера (везде $p^{-1} + p'^{-1} = 1$).

Полученные формулы типа (1) применяются для исследования замкнутых линейных оболочек сдвигов (з. л. о. с.) данной функции f в том или ином пространстве. Рассматриваются следующие случаи:

А) $f \in L^1(R^m)$, $\tilde{f} \in E$ (бесконечно дифференцируема); з. л. о. с. f содержит любую $g \in L^1$, удовлетворяющую условиям: а) $\tilde{g} \in E^{k_{m1}}$; б) из $\tilde{f}(s_0) = 0$ вытекает $\tilde{g}(s_0) = 0$ для $m > 1$ требуется дополнительно, чтобы

$$(\partial^{q_1 + \ldots + q_m}/\partial s_1^{q_1} \ldots \partial s_m^{q_m})\,\tilde{g}(s) = 0$$

для всех $q_1 + \ldots + q_m \leqslant k_{m1}$ в предельных точках множества нулей $\tilde{f}$.

Б) $f \in L^p(R^m)$, $1 < p < 2$, $\tilde{f} \in E^{k_{mp}}$; те же условия, что и в А), с заменой множества нулей функции $\tilde{f}$ на производное этого множества;

В) $f \in L^p(R^m)$, $2 < p < \infty$, $\tilde{f}$ локально принадлежит $L^{p'}$; з. л. о. с. f содержит всякую функцию $g \in L^p$, у которой $\tilde{g}$ локально принадлежит $L^{p'}$ и обращается в нуль почти всюду на множестве нулей $\tilde{f}$.

Г) $f \in C_0(R^m)$, $\tilde{f}$ — мера с носителем $N_{\tilde{f}}$ (т. е. $N_{\tilde{f}}$ — множество существенных точек меры $\tilde{f}$); з. л. о. с. f содержит всякую функцию $g \in C_0(R^m)$, для которой $\tilde{g}$ есть мера с носителем $N_{\tilde{g}} \subset N_{\tilde{f}}$. Очевидными следствиями являются условия совпадения з. л. о. с. функции f со всем пространством: множество нулей функции $\tilde{f}$ должно быть соответственно пустым, или дискретным, или имеющим меру нуль.

А. Г. Костюченко

3293. Теория распределений (A teoria das distribuições), Gas. mat., 1953, **14**, № 55, 13—15 (порт.)

Вопросы редакции «Gas. mat.» относительно теории обобщенных функций (распределений) и ответы (самого общего характера) профессора Р. Л. Гомиша (R. L. Gomes). Сообщение доктора Геррейро о чтении соответствующего курса и подготовительной литературе.

Г. Е. Шилов

3294. Метрические пространства последовательностей, суммируемых непрерывными методами. Влодарский Л., Бюлл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 1, 11—14

Статья содержит формулировки тринадцати теорем (доказательства отсутствуют). Автор переносит на некоторые методы множителей (функциональные методы, в терминологии автора) идею Мазура и Орлича, которые применили теорию пространств типа B_0 (Mazur S., Orlicz W., Studia math., 1948, **10**, 184—208) к исследованию полей методов Теплица (Классификацию локально выпуклых линейных топологических пространств и определение пространств типа B_0 см. в книге Банаха, Курс функціонального аналізу, Радянська школа, Київ, 1948, 199. *Прим. реф.*).

Автор выделяет некоторые методы множителей, называемые им непрерывными и, среди прочих результатов, устанавливает, что поле непрерывного метода является пространством типа B_0, а также находит общий вид линейного функционала в поле непрерывного метода.

Ф. В. Широков

3295. Теория Фредгольма линейных уравнений в локально выпуклых линейных топологических пространствах. Альтман М., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 6, 271—273

Автор замечает, что определение детерминанта и миноров линейного уравнения $\varphi + T\varphi = \varphi_0$, данное Лежанским (РЖМат, 1955, 352) для некоторых линейных операторов T в пространстве, сопряженном пространству Банаха, может быть простым способом обобщено на случай некоторых вполне непрерывных линейных преобразований T, отображающих линейное топологическое локально выпуклое пространство в себя.

Предположения, наложенные на T, сделаны по образцу предположений, принимаемых Лежанским. Основные теоремы теории Фредгольма остаются справедливыми.

R. Sikorski

3296. Обобщение пределов Банаха — Хаусдорфа. Кук (Generalizations of Banach — Hausdorff limits. Cooke Richard G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 3, 410—417 (англ.)

Согласно терминологии Эберлейна (Eberlein W. F., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, **1**, 662—665), линейный функционал $L(x)$ на пространстве m ограниченных числовых последовательностей называется пределом Банаха—Хаусдорфа, если: 1) $L(x) \geqslant 0$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, когда все x_n неотрицательны; 2) $L(x) = 1$, когда $x = (1, 1, \ldots)$; 3) $L(s(x)) = L(x)$, где $s(x)$ — операция сдвига, т. е. $s(x_n) = x_{n+1}$; 4) $L(Hx) = L(x)$, где H — матрица Хаусдорфа с элементами

$$h_{nk} = C_n^k \int_0^1 u^k (1-u)^{n-k}\, d\alpha(u) \quad (k \leqslant n);\ h_{nk} = 0 \quad (k > n),$$

и $\alpha(u)$ — неубывающая функция, причем $\alpha(0) = \alpha(+0) = 0$, $\alpha(1) = 1$.

Вводя обозначения $L^*(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)$, $L_*(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)$, $P_+(x) = \inf_{H \in H_+} L^*(Hx)$, $P_-(x) = -P_+(-x)$, где H_+ — множество всех матриц указанного выше типа, Эберлейн показал, что необходимое и достаточное условие того, чтобы линейный функционал $L(x)$, определенный на пространстве последователь-

ностей, был пределом Банаха—Хаусдорфа, является неравенство $P_-(x) \leqslant L(x) \leqslant P_+(x)$.

Эберлейн доказал также, что условием, необходимым и достаточным для совпадения всех пределов Банаха—Хаусдорфа последовательности x, является равенство $P_-(x) = P_+(x)$. Эти предложения Эберлейна обобщаются в двух направлениях: 1) путем замены множества H_+ другими матричными множествами; 2) путем опускания условия $L(s(x)) = L(x)$. Матричная полугруппа H_+ заменяется полугруппой A стохастических матриц, удовлетворяющих условиям: а) матрицы AB, BA абсолютно эквивалентны в m (две регулярные матрицы называются абсолютно эквивалентными для данного множества последовательностей, если они преобразуют любую последовательность $\{z_k\}$ из этого множества в последовательности $\{z_k'\}$ и $\{z_k''\}$ такие, что $z_k' - z_k'' \to 0$ при $k \to \infty$, Cooke R. G., Infinite matrices and sequence spac, Macmillan, 1950, стр. 97, 105); б) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$ для всех n; в) в полугруппе A содержится по крайней мере одна абсолютно регулярная матрица (регулярная матрица называется абсолютно регулярной, если она преобразует последовательности $\{z_k\}$ и $\{z_{k+1}\}$ в последовательности $\{z_k'\}$ и $\{z_k''\}$ такие, что $z_k' - z_k'' \to 0$ при $k \to \infty$) (см. там же стр. 114, 119). При всех этих изменениях условий автор доказывает теоремы, совершенно аналогичные указанным теоремам Эберлейна, формулировка которых получается из формулировок теорем Эберлейна путем замены множества H_+ множеством A.

Т. А. Сарымсаков

3297. Тауберовы теоремы для абстрактных рядов Дирихле с применением к пространству L^p. **Берджесс** (Tauberian theorems for abstract Dirichlet's series, with applications to the L^p spaces. Burgess D. C. J.), Proc. London Math. Soc., 1953, **3**, ser. 3, № 11, 378—384 (англ.)

Без подробного доказательства приводятся три теоремы тауберова типа, представляющие собой распространение на случай абстрактных рядов Дирихле одной теоремы Ананда Рау (Харди Г., Расходящиеся ряды, 1951, Изд-во иностр. лит-ры, теорема 104) и двух теорем Саса (Szász O., Trans. Amer. Math. Soc., 1936, **39**, 117—130), относящихся к обычным действительным рядам Дирихле. При этом под абстрактным рядом Дирихле понимается ряд

$$\omega_s = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n s} x_n, \quad 0 < s < \infty,$$

где $\{x_n\}$ — последовательность элементов пространства Банаха, а $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел таких, что $\lambda_n \uparrow \infty$.

Теорема 1 Пусть 1) $\lim_{s \to 0+} \omega_s = \gamma$ 2) $\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|^p \times \lambda_n^p (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})^{1-p} = O(\lambda_n)$ при $n \to \infty$ для некоторого $p > 1$. Тогда $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu = \gamma$. Из этой теоремы вытекает

Теорема 1′ Пусть 1) $\lim_{s \to 0+} \omega_s = \gamma$, 2) $\|x_n\| = O[(\lambda_n - \lambda_{n-1}) / \lambda_n]$ при $n \to \infty$. Тогда $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu = \gamma$. В качестве применения теоремы 1 к пространству L^p устанавливается:

Теорема 3. Пусть $f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ — ряд Дирихле с действительными a_ν, сходящийся при $t > 0$. Если $f(t) \in L^p[0, \infty)$ при некотором $p \geqslant 1$ и, для некоторого $q > 1$, $\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^q \lambda_\nu^{q(1-1/p)} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})^{1-q} = O(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, то $\lim_{N \to \infty} \int_0^{\infty} |f(t) - \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu e^{-\lambda_\nu t}|^p \, dt = 0$. А.Ф. Леонтьев

3298. Преобразования гильбертова пространства, положительно определенные функции на группе. **Надь** (Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe. Sz.-Nagy Béla), Acta scient. math., 1954, **15**, № 2, 104—114 (франц.)

Ограниченный линейный оператор T_γ в гильбертовом пространстве H (действительном или комплексном), зависящий от элемента γ группы Γ, порождает положительно определенную функцию на Γ, если $\sum_{\delta, \gamma \in \Gamma} \times (T_{\delta^{-1}\gamma} g_\delta, g_\gamma) \geqslant 0$. Здесь g_γ — любая система элементов из H, отличных от нуля лишь для конечного числа элементов группы Γ. Кроме того, предполагается, что $T_{\gamma^{-1}} = T_\gamma^*$. Устанавливается теорема, которую можно рассматривать как обобщение одного результата Гельфанда и Райкова (Матем. сб., 1943, **13**, 301—316). Пусть T_γ — слабо непрерывная положительно определенная функция на топологической группе Γ и $T_\varepsilon = I$ (ε — единичный элемент группы). Тогда в некотором пространстве Гильберта $H \supset H$ существует семейство унитарных преобразований $\{U_\gamma\}$, образующих (сильно) непрерывное представление группы Γ и удовлетворяющих условию $T_\gamma = PU_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$), где P — оператор проектирования на H.

Используя эту теорему, автор получает результат М. А. Наймарка (Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, **4**, 227—309; Докл. АН СССР, 1943, **41**, 373—375), а также дает новые доказательства и уточнения своих теорем о сжатиях гильбертова пространства (РЖМат, 1954, 2626).

М. С. Лившиц

3299. О распространении теоремы о приведении к главным осям на вполне непрерывные операторы. **Накамура, Такеда, Турумару** (On some extended principal axis theorems for completely continuous operators. Nakamura M., Takeda Z., Turumaru T.), Tôhoku Math. J., 1953, **5**, № 2, 190—193 (англ.)

Пусть H — гильбертово пространство и φ и ψ — элементы H. Символом $\varphi \times \psi$ обозначается одномерный оператор, определенный на H равенством $\xi(\varphi \times \psi) = \langle \xi, \psi \rangle \cdot \varphi$ для любого $\xi \in H$, где $\langle \xi, \psi \rangle$ — скалярное произведение элементов ξ и ψ.

Шаттеном доказано (Schatten R., A theory of Cross-space, Princeton, 1950), что для любого вполне непрерывного оператора a, определенного на H, имеет место разложение $a = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i \times \psi_i$, где $\{\alpha_i\}$ — невозрастающая (по модулю) последовательность комплексных чисел, сходящаяся к нулю, а $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ — ортонормальные системы. Называя оператор диагональным, если он может быть представлен в виде $a = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i \times \varphi_i$, авторы, опираясь на разложение Шаттена, показывают, что для любого вполне непрерывного оператора a существуют такие унитарные операторы u и v, что uav — диагональный.

Далее рассматривается одновременное приведение к диагональному виду нескольких операторов и доказывается, что вполне непрерывные операторы a_i тогда и только тогда приводимы к диагональному виду одной и той же парой унитарных операторов u и v, когда $a_i a_j^*$ и $a_j a_i^*$ нормальны для любой пары i и j и когда $a_i a_j^* a_k = a_k a_j^* a_i$ для любой тройки i, j, k.

Приводятся также некоторые другие результаты, получающиеся с помощью вышеуказанных. Пространство H предполагается сепарабельным, но авторы указывают, что это сделано лишь для упрощения обозначений.

В. И. Соболев

3300. Спектральная матрица и функция Грина для сингулярных самосопряженных краевых задач. **Коддингтон** (The spectral matrix and Green's

function for singular self-adjoint boundary value problems. Coddington E. A.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 2, 169—185 (англ.)

Рассматривается самосопряженное дифференциальное выражение

$$L=\sum_{k=0}^{n} p_k \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (\overline{p}_k \cdot), \qquad (1)$$

где $p_k(x)$ — комплекснозначные функции, обладающие $n-k$ непрерывными производными на открытом интервале (a, b). Доказывается существование и единственность функции Грина в случае двух сингулярных самосопряженных краевых задач для уравнения $Lu-\lambda u=0$. В первом случае предполагается, что условие

$$\int_a^b |u|^2 dx < \infty \qquad (2)$$

без дополнительных ограничений на функции $u(x)$ на концах интервала (a, b) определяет самосопряженную краевую задачу. Во втором случае точка a считается регулярной и самосопряженная задача по предположению определяется условием (2) и заданием граничного условия лишь в точке a. В указанных двух случаях устанавливается, кроме того, существование и единственность спектральной матрицы, и выводится формула обращения.

Для того случая, когда функции $p_k(x)$ в формуле (1) являются вещественными, новых результатов работа не содержит. В. Б. Лидский

3301. О некоторых упорядоченных множествах проекторов в гильбертовом пространстве. Сойсал (Sur certains ensembles ordonnés de projecteurs dans l'espace de Hilbert. Soysal Selma), Istanbul Üniv. fen. fak. mec., 1953, **A18**, № 3, 305—321 (франц.; резюме турец.)

Пусть $\mathscr{P}$ — упорядоченное множество проекторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H, содержащее нулевой и единичный проекторы. Пусть, кроме того, соблюдены условия:

I. Всякое непустое подмножество множества $\mathscr{P}$ имеет в $\mathscr{P}$ точную верхнюю границу.

II. Точная нижняя граница убывающей последовательности $P_1 \geqslant P_2 \geqslant \ldots \geqslant P_n \geqslant \ldots$ $(P_k \in \mathscr{P};\ k=1, 2, \ldots)$ в множестве $\mathscr{P}$ совпадает с пределом этой последовательности.

III. Множество $\mathscr{P}$ содержит счетное плотное в $\mathscr{P}$ подмножество.

Каждый фиксированный элемент $f \in H$ определяет монотонную функцию $\Phi(P)=\|Pf\|^2$ $(P \in \mathscr{P})$, которая, в свою очередь, порождает меру на $\mathscr{P}$. Пусть φ — комплекснозначная функция на $\mathscr{P}$, измеримая относительно введенной меры и такая, что $\int_{\mathscr{P}} |\varphi(P)|^2 d\|Pf\|^2 < \infty$.

Если g—элемент из $\mathfrak{M}(f)\mathfrak{P}$—линейного замыкания векторов $\{Pf\}$ $(P \in \mathscr{P})$,— то существует интеграл

$$L(g)=\int_{\mathscr{P}} \varphi(P)\, d(Pf, g),$$

который представляет собой линейный функционал в $\mathfrak{M}(f)$. Поэтому в $\mathfrak{M}(f)$ найдется единственный элемент f^* такой, что $L(g)=(f^*, g)$. По определению,

$$\int_{\mathscr{P}} \varphi(P)\, dPf = f^*.$$

В работе устанавливаются простейшие свойства определенного таким образом интеграла. Более глубокие факты сообщены без доказательства в резюме, они составляют содержание глав II — IV (в реферируемой статье подробно изложена лишь глава I). Г. П. Акилов

3302. S-матрица и условие причинности. II. Нерелятивистские частицы. Кампен (S Matrix and causality condition. II. Nonrelativistic particles. Kampen N. G. van), Phys. Rev., 1953, **91**, ser. 2, № 5, 1267—1276 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1955, 1302. Автор продолжает изучение вопроса о том, насколько полную информацию о поведении S-матрицы (как функции энергии) можно получить из общих соображений симметрии, законов сохранения и причинности.

Рассматривается задача о рассеянии на ядре конечного размера a частиц, подчиняющихся уравнению Шредингера. Сферически симметричное решение $\psi(r, t)$ вдали от рассеивающего центра пишется в виде

$$\psi(r, t) \sim r^{-1} \int_0^\infty A(p)\, e^{-ipr-iEt} \ldots dp - $$

$$+ r^{-1} \int_0^\infty B(p)\, e^{ipr-iEt} \ldots dp = \psi_{\text{in}}(r, t) + \psi_{\text{out}}(r, t),$$

$S(p)$ определяется из равенства $B(p)=S(p)A(p)$.

Условие причинности записывается в следующей форме:

$$\int |\psi(r, 0)|^2 r^2 dr \leqslant \int |\psi_{\text{in}}(r, -\infty)|^2 r^2 dr. \qquad (1)$$

С помощью условия причинности (1) доказывается: если $A(p)$ аналитически продолжаема в угол $0<\theta<\pi/2$ и $\int_0^\infty |A(pe^{i\theta})|^2 dp \leqslant M$, то $B(p)$ удовлетворяет этим же условиям. Отсюда, воспользовавшись $S(\lambda^*)=[S(\lambda)^*]^{-1}$, получим, что $S(\lambda)$ есть мероморфная функция в правой полуплоскости. Выбором различных A доказывается, что в первом квадранте $S(\lambda)$ регулярна, $|\operatorname{Im} S(\lambda)| \leqslant 1$, $|S(\lambda)| < M_\delta$ в угле $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant (\pi/2)-\delta$. В отличие от электромагнитного случая одного условия причинности недостаточно для аналитического представления $S(\lambda)$. При дополнительном предположении, что $S(\lambda)$ может быть единственным образом продолжена в левую полуплоскость так, что выполняется условие симметрии $S(-\lambda^*)=[S(\lambda)]^*$, для $S(\lambda)$ получается разложение

$$S(\lambda)=\prod \frac{1-\lambda/\Lambda_n}{1-\lambda/\Lambda_n^*} \cdot \frac{1+\lambda/\Lambda_n^*}{1+\lambda/\Lambda_n} \prod \frac{1-\lambda/iP_m}{1+\lambda/iP_m}. \qquad (2)$$

Здесь Λ_n — нули S в первом квадранте, а iP_m — на положительной мнимой полуоси.

Полученные результаты снова применяются для вывода формулы эффективного сечения и получения свойств R-функции Вигнера. В заключение указывается, что аналитичность $S(\lambda)$ практически не дает возможности вычислять значения $S(\lambda)$, зная $S(p)$ для вещественных p, так как такая зависимость не корректна.

Примечание референта. Для a не равного нулю следует заменить $A(p)$ на $e^{-ipa}A(p)$, $B(p)$ на $e^{ipa}B(p)$, $S(\lambda)$ на $e^{2ia\lambda}S(\lambda)$. В формуле (2) добавится множитель $e^{2i\alpha\lambda}$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant a)$. Э. Э. Шноль

3303. Обобщение классического формализма теории поля посредством функционалов. Шёнберг (Generalization of the classical field formalism by means of functionals. Schönberg M.), Nuovo cimento, 1953, **10**, № 11, 1597—1601 (англ.)

Предлагается употреблять вместо волновых функций функционалы, например линейный функционал

$$\chi_1[t; \psi^*]=\int \Psi(t; \mathbf{x})\, \psi^*(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

вместо волновой функции $\Psi(t; \mathbf{x})$, описывающей чистое состояние. Подобным же образом вместо неймановской матрицы плотности вводится квадратичный функционал. Указывается на возможность дальнейших обобщений.

Как пример применения метода функционалов дан вывод уравнения Шредингера для волнового функционала в теории квантованного скалярного поля, а также для матрицы плотности в случае смеси состояний поля.

См. также: 2989, 3076, 3086, 3089, 3199, 3258, 3331, 3409, 3432 Д.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3304. Замечания к понятию случая. Ульмо (Remarques sur le hasard. Ullmo J.), Rev. questions scient., 1953, **14**, oct. 481—493 (франц.)

3305. О некоторых предельных теоремах для цепей Маркова. Дынкин Е. Б., Укр. матем. ж., 1954, **6**, № 1, 21—27

Пусть $x(t)$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ — однородная цепь Маркова (S) с произвольным множеством состояний. Приводится ряд результатов и ставятся некоторые задачи, связанные с общей проблемой изучения предельного поведения сумм

$$\zeta(u) = \sum_{t=0}^{u} f(x(t), t).$$

Пусть $P^{(n)}(x, E)$ — вероятность перехода из состояния x в множество E за n шагов. Цепь S называется равномерно эргодической, если при $n \to \infty$ $P^{(n)}(x, E)$ сходится к распределению $P(E)$, не зависящему от x, равномерно по x и E. Для равномерно эргодической цепи устанавливается:

Теорема 1. Если $f(x)$ — P-измеримая функция и $\int |f(x)|^{2+\delta} P(dx) < \infty$, то при $u \to \infty$ величина $u^{-1/2}(\zeta(u) - au)$, $a = \int f(x) P(dx)$, асимптотически нормальна $(0, \sigma)$.

Распределение $F(x)$ относится к классу $H(S)$, если $F(x)$ является предельным распределением последовательности $B^{-1}(u)(\sum_{t=1}^{u} f(x(t)) - A(u))$ при некотором выборе функций $f(x)$, $A(u)$, $B(u)$ $(B(u) \to \infty$ при $u \to \infty$, $u = 1, 2, \ldots)$.

Пусть S — цепь Маркова со счетным множеством состояний и τ — число шагов от выхода из состояния ω до первого возвращения в это состояние.

Теорема 3. Если $D(\tau) < \infty$, то $H(S)$ состоит из устойчивых распределений.

Для случая, когда $\zeta(u)$ — координата точки, находящейся в одномерном симметрическом неограниченном блуждании, приводятся следующие результаты.

Теорема 4 (Р. Л. Добрушин). Если $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = a < \infty$, $f(k) \geqslant 0$, то

$$\lim_{u \to \infty} P\left(\frac{\zeta(u)}{a\sqrt{u}} < s\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^s e^{-x^2/2}\, dx \quad \text{при } s > 0.$$

Теорема 6. Пусть $f(x) > 0$, $\lim_{k \to +\infty} k^{-\alpha} f(k) = c_1 \neq 0$, $\lim_{k \to -\infty} |k|^{-\alpha} f(k) = c_2$ и $\Phi(x) = c_1 x^{\alpha}$ при $x > 0$, $\Phi(x) = c_2 |x|^{\alpha}$ при $x < 0$, $(\alpha > -1)$. Тогда

$$\lim_{u \to \infty} P(u^{-(1+\alpha/2)} \zeta(u) < s) = F(s),$$

где $F(s)$ — функция распределения величины

$$\int_0^1 \Phi(y(t))\, dt,$$

$y(t)$ — случайная функция Винера.

Доказательства теорем в работе не приведены.

И. И. Гихман

3306. Замечания о процессе Пуассона (I). Флорек, Марчевский, Рыль-Нардзевский (Remarks on the Poisson stochastic process (I). Florek K., Marczewski E., Ryll-Nardzewski C.), Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, № 1, 122—129 (англ.)

Рассматривается случайный процесс $\omega(t)$ $(t \geqslant 0)$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $\omega(0) = 0$; 2) $\omega(t)$ непрерывны справа при всех t; 3) $\omega(t)$ — неубывающие функции, принимающие только целые значения; 4) приращения $\omega(t_1) - \omega(t_2)$ и $\omega(t_3) - \omega(t_4)$ при $t_1 > t_2 > t_3 > t_4$ независимы, а при $t_1 - t_2 = t_3 - t_4$ одинаково распределены. Доказывается, что случайная величина $\omega(t_0)$ распределена по закону Пуассона со средним значением at_0 (a — постоянная) в том и только в том случае, когда $\omega(t)$ с вероятностью 1 не имеет скачков, превосходящих 1.

Этот результат сразу вытекает из теории безгранично делимых законов. Он содержится также в заметке Редхеффера (РЖМат, 1954, 1722), где формулируется в терминах случайных точек на прямой (случайные точки соответствуют разрывам $\omega(t)$) и получается при формально более узких, а фактически эквивалентных предположениях.

А. А. Юшкевич

3307. Замечания о процессе Пуассона (II). Марчевский (Remarks on the Poisson stochastic process (II). Marczewski E.), Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, № 1, 130—136 (англ.)

Рассматривается случайный процесс $\omega(t)$, удовлетворяющий условиям 1)—4) реф. 3306. Предполагается, кроме того, что приращения функции $\omega(t)$ на непересекающихся полуинтервалах $(u_i, v_i]$, $i = 1, \ldots, n$, взаимно независимы для любого конечного числа n интервалов. Определяя приращение функции $\omega(t)$ на произвольном борелевском множестве B, как сумму скачков функции $\omega(t)$ по всем $t \in B$, автор доказывает, что приращения $\omega(t)$ на непересекающихся борелевских множествах B_j, $j = 1, \ldots, n$, взятых в любом конечном числе, являются взаимно независимыми случайными величинами. Доказывается также, что распределение приращения $\omega(t)$ на множестве B зависит только от лебеговой меры множества B, и что если последовательность множеств B_j $(j = 1, 2, \ldots)$ сходится по мере Лебега к множеству B, то приращения $\omega(t)$ на B_j сходятся по вероятности к приращению $\omega(t)$ на B.

А. А. Юшкевич

3308. Марковские процессы и стохастические уравнения. Маруяма (Markov processes and stochastic equations. Maruyama Gisirō), Natural Sci. Rept. Ochan. Univ., 1953, **4**, № 1, 40—43 (англ.)

Пусть функции $a(t, x)$ и $b(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных t, x $(0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < x < +\infty)$ и удовлетворяют по x условию Липшица:

$$|a(t, x) - a(t, x')| + |b(t, x) - b(t, x')| < C|x - x'|. \quad (1)$$

Пусть $y(t)$ — непрерывный с вероятностью 1 марковский процесс, определяемый из стохастического интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 + \int_0^t a(\tau, y(\tau))\, d\tau + \int_0^t b(\tau, y(\tau))\, dx(\tau),$$

где $x(\tau)$ — винеровская случайная функция. Утверждается (теорема 3), что если последовательность $y^{(n)}(t)$ марковских процессов $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ удовлетворяет условиям:

$$1) \quad \frac{1}{t - s} \int_{|y-x| > \delta\sqrt{1+x^2}} dF^{(n)}(s, x; t, y) = o(1)$$

при $n \to \infty$, $t - s \to 0$,

$$2) \quad \frac{1}{t - s} \int_{|y-x| \leqslant \delta\sqrt{1+x^2}} (y - x)\, dF^{(n)}(s, x; t, y) =$$

$$= a(s, x) + o(\sqrt{1 + x^2})$$

при $n \to \infty$, $t - s \to 0$, $\delta \to 0$,

$$3)\quad \frac{1}{t-s}\int_{|y-x|\leqslant\delta\sqrt{1+x^2}}(y-x)^2\,dF^{(n)}(s,x;t,y) =$$

$$= b^2(s,x) + o(1+x^2),$$

где функции a и b удовлетворяют (1) и имеют непрерывные вторые производные по x, то для любой пары непрерывных функций $f(t)$ и $g(t)$ с

$$f(t) \leqslant g(t),\ f(0) < y_0 < g(0)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{f(t) \leqslant y^{(n)}(t) \leqslant g(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\} =$$

$$= P\{f(t) \leqslant y(t) \leqslant g(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Из этой теоремы может быть получено, в частности, новое доказательство известного результата Колмогорова о максимальном отклонении эмпирической функции распределения от теоретической.

Доказательства не приводятся. Ю. В. Прохоров

3309. Процессы Маркова и стохастические уравнения. Маруяма (Markov 過程と確率函數方程式. 丸山儀四郎), 數學 (Сугаку), 1953, **5**, № 3, 9—19 (япон.)

Полное доказательство результатов, сообщенных в реф. 3308. Ю. В. Прохоров

3310. Об одном вероятностном процессе исчерпывания. Блумквист (On an exhaustion process. Blomqvist N.), Skand. aktuarietidskr., 1952, **35**, 201—210 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Дана последовательность экспериментов $E_1,\ldots,E_n$, в которых наблюдается наступление или ненаступление некоторого события S. Испытание состоит в том, что эти эксперименты последовательно производятся до тех пор, пока первый раз не наступит событие S. Если ни при одном из экспериментов событие S не наступает, то все n экспериментов оказываются произведенными, и в этом случае говорят, что испытание не было прервано. Второе испытание проводится таким же образом, но на этот раз эксперимент, на котором было прервано первое испытание, исключается. Вообще, в m-м испытании из последовательности экспериментов исключаются те, на которых были прерваны предыдущие испытания.

Основная задача — изучение распределения числа X прерванных испытаний среди первых m испытаний в предположении, что вероятность наступления события S в эксперименте E_i равна $p = 1 - q$ при любом i во всех испытаниях, в которых этот эксперимент производится. Доказывается, что при $0 \leqslant x \leqslant \min(m, n)$

$$P\{X = x\} = q^{(m-x)(n-x)}\,\Pi(m-x+1, m) \times$$

$$\times\,\Pi(n-x+1, n)/\Pi(1, x),$$

где

$$\Pi(a, b) = \Pi_{k=a}^{b}(1-q^k),\ \Pi(1,0) = 1.$$

Рассматриваются различные предельные формы этого распределения. Доказывается, что если m фиксировано, а $m \to \infty$ и $p \to 0$, так что $mp \to \lambda$, то X имеет в пределе биномиальное распределение с параметрами n и $1 - e^{-\lambda}$. (Эта теорема сохраняет силу, если поменять ролями m и n). Если m и $n \to \infty$ независимо друг от друга, а $p \to \infty$, так что $mnp \to \mu$, то X имеет в пределе распределение Пуассона с параметром μ. Если p фиксировано, а m и $n \to \infty$, то случайная величина $Y = \min(m, n) - X$ имеет невырожденное распределение тогда и только тогда, когда $|m - n| \to c$.

Рассматриваются возможные пути перехода к процессам с непрерывно меняющимся параметром. Далее изучается распределение числа M испытаний, необходимых для исключения всех экспериментов E_i. Функция распределения случайной величины M есть

$$P\{M \leqslant m\} = \Pi(m-n+1, m) \quad (m \geqslant n).$$

Рассматриваются различные предельные формы этого распределения. Даются приближенные выражения для средних значений величин T и M.

Автор указывает на следующую реализацию исследуемой задачи. Вдоль некоторого пути заложено n мин, и m лиц проходят по этому пути один за другим, причем каждое из этих лиц имеет постоянную вероятность P поражения ранее не взорвавшейся миной. В этой интерпретации X есть общее число взрывов, M — число лиц, прохождение которых вызывает взрыв всех заложенных мин. А. А. Петров

3311. Течение жидкости через последовательный ряд сосудов. Кулик (Flow of fluid through a system of vessels in series. Kulik S.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 8, 548—550 (англ.)

Жидкость со средней скоростью a протекает последовательно через n одинаковых сосудов объема v. Попадая в сосуд, новая жидкость мгновенно перемешивается с бывшей там жидкостью. Тогда время t, требуемое для прохождения частицей жидкости системы из n сосудов, имеет плотность распределения, равную

$$f_n(t) = [k^n/(n-1)!]\,t^{n-1}\,e^{-kt},\ 0 \leqslant t < \infty,$$

где $k = a/v$. При $n \to \infty$, $nv = \text{const}$, математическое ожидание t остается постоянным, дисперсия t стремится к нулю. А. А. Юшкевич

3312. Влияние предшествующих поколений на распределение частот генов в популяции. Патлак (The effect of the previous generation on the distribution of gene frequencies in populations. Patlak Clifford S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1953, **39**, № 10, 1063—1068 (англ.)

Распределение частот генов можно приближенно найти с помощью уравнения Фоккера — Планка. При различных предположениях определяются коэффициенты в уравнении Фоккера—Планка. Б. А. Севастьянов

3313 К. Теория вероятностей. Мания Г. М. (ალბათობის თეორია. მანია გ.), თბილისი სამეცნიერო მეთოდური კაბინეტის გამომცემლობა, 239 стр., Изд-во науч.-метод. кабинета М-ва просвещения ГрузССР, 1954) (груз.) (Тбилиси)

Книга представляет собой первый оригинальный учебник на грузинском языке по обычному курсу теории вероятностей; как пишет во введении автор, она предназначена для физико-математических факультетов пединститутов. Книга состоит из 12 глав.

В гл. I дается подробное изложение операций над событиями. В гл. II приведены различные определения вероятности и теоремы, вытекающие непосредственно из этих определений. Гл. III посвящена простейшему виду закона больших чисел и схеме Бернулли. В гл. IV изложена (следуя А. Н. Колмогорову) современная аксиоматика теории вероятностей. В гл. V приведена центральная предельная теорема. Гл. VI посвящена асимптотической формуле Пуассона и некоторым ее приложениям. В гл. VII приведены элементарные сведения о цепях Маркова.

В главах VIII, IX, X, XI излагается следующий материал: случайные величины и функции распределения; основные характеристики случайных величин; нормальный закон распределения и закон больших чисел. В гл. XII приведена таблица характеристических функций. А. В. Бицадзе

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3314. К теории вариационных рядов. Реньи (On the theory of order statistics. Rényi Alfréd), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 3—4, 191—231 (англ.; резюме русс.)

Предлагается новый метод изучения свойств вариационного ряда, основанный на следующем результате Малмквиста (Malmquist S., Skand. actuarietidskr 1950, **33**, 214—222): если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — последовательность независимых случайных величин с непрерывной функцией распределения $F(x)$, и $\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*$ —соответствующий вариационный ряд, то величины (η_k^*/η_{k+1}^*), где $\eta_k^* = F(\xi_k^*)$ $(k = 1,2, \ldots, n)$, взаимно независимы и равномерно распределены на интервале (0,1).

Дается новое доказательство последнего предложения и с его помощью устанавливается ряд известных теорем о членах вариационного ряда. Из новых результатов, следует указать на найденные автором предельные $(n \to \infty)$ распределения величин

$$\sup_x \sqrt{n}\, F^{-1}(x)\,(F_n(x) - F(x))$$

и

$$\sup_x \sqrt{x}\, F^{-1}(x) |\, F_n(x) - F(x)|,$$

где x удовлетворяет условию $a \leqslant F(x) \leqslant b$ $(0 < a < b \leqslant 1)$, и $F_n(x)$ обозначает эмпирическую функцию распределения. В качестве примера приведем формулу $(y > 0)$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sqrt{n} \sup_{F(x)\geqslant a} F^{-1}(x) \,|\, F_n(x) - F(x)\,| < y\} = L(y\sqrt{a/(1-a)}),$$

$$L(y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8y^2}\right\}.$$

Примечание референта. Приводимая автором асимптотическая оценка (снизу) вероятности совмещения неравенств (стр. 209)

$$\sup_{a\leqslant F(x)} \sqrt{n}\, F^{-1}(x) \,|\, F_n(x) - F(x)| < y,$$

$$\sup_{F(x)\leqslant 1-a} \sqrt{n}\,[1 - F(x)]^{-1} \,|\, F_n(x) - F(x)| < y,$$

недостаточно обоснована. И. И. Гихман

3315. О теории упорядоченных выборок. Реньи (A rendezett minták elméletéröl. Rényi Alfréd), Magyar tudomán. akad. mat. és fiz. osztalyanak közleményei, 1953, **3**, № 4, 467—503 (венг.)

Излагаются результаты, опубликованные в статье автора (см. реф. 3314). Оценка, указанная в примечании референта цитированной статьи, опущена.

В. С. Королюк

3316. Оценки при помощи совокупных доверительных интервалов. Рой, Бос (Simultaneous confidence interval estimation. Roy S. N., Bose R. C.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 4, 513—536 (англ.)

Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — многомерная случайная величина, распределение которой зависит от неизвестного параметра θ:

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m).$$

Пусть

$$\pi_k = f_k(\theta) \qquad (1)$$

— заданные функции параметра; индекс k пробегает конечное или бесконечное множество Ω.

Рассматривается задача о нахождении таких функций φ_{k1}, φ_{k2} результатов наблюдений, что при любом θ вероятность одновременного выполнения неравенств

$$\varphi_{k1}(y) \leqslant \pi_k \leqslant \varphi_{k2}(y), \quad k \in \Omega, \qquad (2)$$

равна $1 - \alpha$.

Эта задача, в частности, разрешима в следующем случае. Пусть возможно найти множество функций

$$\psi_k(y, \pi_k) \quad (k \in \Omega) \qquad (3)$$

таких, что из неравенств

$$d_1 \leqslant \psi_k \leqslant d_2 \quad (k \in \Omega) \qquad (4)$$

вытекают неравенства (2) и обратно, причем d_1 и d_2 — постоянные, не зависящие от k.

Пусть для данного θ

$$W_{k,\theta} = [y : d_1 \leqslant \psi_k \leqslant d_2]$$

представляет множество точек y в выборочном пространстве E_n, для которого выполняется (4), и пусть:

$$W_\theta = \bigcap_k W_{k,\theta}.$$

Тогда, если W_θ будет борелевским множеством для всякого допустимого θ и если вероятность

$$P\{y \in W_\theta \,|\, \theta\} = 1 - \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

будет независимой от θ, то $1 - \alpha$ будет вероятностью одновременного осуществления неравенства (2) для всех $k \in \Omega$.

Указывается, как можно построить множество функций (3) и критическую область заданного объема α для проверки гипотезы H_0, которая фиксирует значение π_k для всех $k \in \Omega$.

Даются применения к задачам одномерных и многомерных совокупных оценок. Пример использования совокупных доверительных интервалов можно найти также в более ранней работе Шеффе (РЖМат, 1954, 5693). В. И. Романовский

3317. Оптимальный критерий скольжения для дисперсий k нормальных распределений. Труакс (An optimum slippage test for the variances of k normal distributions. Truax Donald R.), Ann. Math. Statistics, 1953, **75**, № 23, 669—674 (англ.)

Даны k выборок объема n

$$x_{i1}, \ldots, x_{in}, \quad i = 1,2, \ldots, k,$$

из k нормальных совокупностей $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ с неизвестными средними $m_1, \ldots, m_k$ и неизвестными стандартными уклонениями $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Рассматриваются следующие гипотезы: D_0 — все дисперсии равны; D_j — гипотеза D_0 неверна и $\sigma_j^2 = \max(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2)$ $(j = 1,2,\ldots,k)$. Для выбора одной из указанных $k+1$ гипотез Кокран (Cochran W. G., Ann. Eugenics, 1941, **11**, 47—52) предложил следующий критерий. Пусть

$$\bar{x}_i = \sum_{\alpha=1}^n x_{i\alpha}/n,$$

$$s_i^2 = \sum_{\alpha=1}^n (x_{i\alpha} - \bar{x}_i)^2/(n-1).$$

Если $s_M^2/\sum s_i^2 > L_\alpha$ — принимается D_M; если $s_M^2/\sum s_i^2 \leqslant L_\alpha$ — принимается D_0.

Здесь L_α определяется требованием, чтобы в случае, когда гипотеза D_0 верна, она принималась бы с вероятностью $1 - \alpha$; M — номер совокупности с наибольшей выборочной дисперсией.

Таблицы значений L_α при различных α, n и k

имеются в книге (Eisenhart, Hastay, Wallis (Editors), Selected techniques of statistical analysis, McGraw-Hill Book Co., 1947, 390—391).

В работе показывается, что вышеупомянутый критерий является оптимальным (в некотором, точно разъясняемом смысле) в достаточно широком классе критериев уровня α. Е. Л. Рвачева

3318. Некоторые свойства оценок для стандартного отклонения, основанных на уклонениях от среднего и на последовательных разностях. Камат (Some properties of estimates for the standard deviation based on deviations from the mean and variate differences. Kamat A. R.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, 15, № 2, 233—240 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из нормальной совокупности со средним значением μ и стандартным отклонением σ. Рассматриваются два типа оценок для стандартного отклонения:

а) Оценки типа Σ_{p0}, основанные на p-х степенях уклонений индивидуальных значений от выборочного среднего:

$$\sum_{p0} = \sum_{i=1}^{n} (|x_i - \bar{x}|^p / n k_0^p M |z_i|^p),$$

где

$$z_i = (x_i - \bar{x}) / k_0 \sigma, \quad k_0^2 = (n-1)/n.$$

б) Оценки типа Σ_{pr}, основанные на абсолютных значениях последовательных разностей, определяемых посредством соотношения

$$\Delta^r x_i = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j C_r^j x_{i+j},$$

а именно

$$\sum_{pr} = \sum_{i=1}^{n-r} (|\Delta^r x_i|^p / (n-r) k_r^p M |u_i|^p),$$

где

$$u_i = \Delta^r x_i / k_r \sigma, \quad k_r^2 = C_{2r}^r.$$

Величины

$$S_{p0} = \left(\sum_{p0}\right)^{1/p}$$

и

$$S_{pr} = \left(\sum_{pr}\right)^{1/p}$$

являются асимптотически несмещенными оценками для σ.

Приводится таблица эффективности оценок S_{pr} для значений $p = 1,2,3,4$ и $r = 0,1,2,3,4$, и таблица эффективности оценок Σ_{pr} для тех же значений p и r в случае $n = 10$ и $n = 20$.

Далее доказывается, что в случае, когда каждое последующее значение в выборке оказывает малое влияние на среднее из предыдущих значений, оценки Σ_{11}, Σ_{21} предпочтительнее, чем оценки Σ_{10} и Σ_{20}.

В заключение доказывается лемма:

Если

$$\omega_{pr} = \sum_{pr} / s^p, \quad s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / (n-1),$$

то

$$\mu_k'(\omega_{pr}) = \mu_k'\left(\sum_{pr}\right) / \mu_k'(s^p),$$

где μ_k' — момент относительного начала.

С. Х. Туманян

3319. Выбор между двумя простыми гипотезами и состоятельные критерии. Басу (Choosing between two simple hypotheses and the criterion of consistency. Basu D.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1953, 19, № 6, 841—849 (англ.)

По наблюденным значениям $x_1, \ldots, x_n$ первых n случайных величин из последовательности $\{X_j\}$ требуется произвести выбор между гипотезами $H_i (i = 0,1)$ о том, что указанные случайные величины имеют распределение с плотностью $f_i(x_1, \ldots, x_n)$. Правила для выбора между гипотезами базируются на рассмотрении ошибок α_{in}, равных вероятности выбора гипотезы H_j, когда верна гипотеза H_i. Указывается три типа правил. В правилах 1-го типа минимизируется вероятная ошибка $\alpha_n = w_0\alpha_{0n} + w_1\alpha_{1n}$ (w_i — априорные вероятности гипотез H_i), и выбирается гипотеза H_0 или H_1 в зависимости от того, является ли величина f_{1n} меньше или больше величины λf_{0n}, $\lambda > 0$. В правилах 2-го типа минимизируется ошибка α_{1n} при условии $\alpha_{0n} \leqslant \alpha$. В правилах 3-го типа минимизируется $\max(\alpha_{0n}, \alpha_{1n})$.

Правило называется состоятельным, если при $n \to \infty$ обе ошибки α_{0n} и α_{1n} одновременно стремятся к нулю. Состоятельные правила существуют не всегда. Например, если гипотезам H_i соответствуют нормальные распределения с одинаковой матрицей вторых моментов Λ_n, но различными математическими ожиданиями ξ_n^i, то для существования состоятельного правила необходимо и достаточно, чтобы «критерий Махалонобиса» $D_n^2 = (\xi_n^0 - \xi_n^1)\,\Lambda_n^{-1}\,(\xi_n^0 - \xi_n^1)'$ стремился к бесконечности при $n \to \infty$.

Если X_j независимы и одинаково распределены, то состоятельные правила всегда существуют. Более того, если при каждой из гипотез H_i соответствующие распределения абсолютно непрерывны (или дискретны), то правила вышеуказанных трех типов состоятельны. Пусть $f_i(x)$ — плотность вероятности любой величины X_j при гипотезе H_i и пусть существуют

$$\mu_0 = M(\log \frac{f_0}{f_1} | H_0), \quad \mu_1 = M(\log \frac{f_1}{f_0} | H_1),$$

$$\sigma_i^2 = D(\log \frac{f_1}{f_0} | H_i).$$

Тогда в правилах третьего типа величина ошибок α_{in} асимптотически определяется выражением $(\mu_0 + \mu_1)/(\sigma_0 + \sigma_1)$, которое, таким образом, служит мерой различия между гипотезами H_i. В указанном выше случае нормальных распределений $(\mu_0 + \mu_1)/(\sigma_0 + \sigma_1) = D/2$.

А. С. Монин

3320. Усеченное распределение Пуассона. Райдер (Truncated Poisson distributions. Rider Paul R.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 264, 826—830 (англ.)

Рассматривается вопрос об оценке параметра λ распределения Пуассона

$$p_r = (\lambda^r / r!)\, e^{-\lambda}$$

в случае, когда частоты для первых k значений случайной величины неизвестны.

Предлагаемая оценка для λ имеет вид

$$\lambda = (T_2 - kT_1)/(T_1 - (k-1)T_0),$$

где

$$T_0 = \sum_k^{\infty} f_x, \quad T_1 = \sum_k^{\infty} x f_x, \quad T_2 = \sum_k^{\infty} x^2 f_x,$$

f_x — частота значения x. С. Х. Туманян

3321. О критерии согласия Неймана и его мощности по отношению к определенной системе альтернатив.

Бартон (On Neyman's smooth test of goodness of fit and its power with respect to a particular system of alternatives. Barton D. E.), Skand. aktuarietidskr., 1953, № 1—2, 24—63 (англ.)

Пусть при нулевой гипотезе случайная величина ξ имеет плотность $p(x \mid H_0)$ и функцию распределения $F(x \mid H_0)$. Пусть далее

$$y = F(x \mid H_0)$$

и $\pi_r(y)$ — модифицированный полином Лагранжа r-го порядка.

Для различения гипотезы H_0 и гипотезы $H_N(\theta_1, \ldots, \theta_N)$, при которой

$$p(x \mid H_N) = \{1 + \sum_{r=1}^{N} \theta_r \pi_r(y)\}\, p(x \mid H_0),$$

предлагается критерий, основанный на статистике

$$\psi^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \pi_r(y_i)\right)^2,$$

где $y_i = F(x_i \mid H_0)$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты n независимых наблюдений величины ξ.

Находится точное распределение величины ψ^2 и изучается мощность соответствующего критерия по отношению к указанной системе альтернатив.

Аналогичная задача рассматривалась ранее Нейманом (Neyman J., Scand. aktuarietidskr., 1937, **20**, 150—199).

С. Х. Туманян

3322. О схеме Штейна двойной выборки. Силбиндер (On Stein's two-stage sampling scheme. Seelbinder B. M.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 4, 640—649 (англ.)

Для нахождения оценки T среднего нормальной совокупности m при заданных «допустимом уклонении» d и уровне значимости α, обеспечивающих неравенство

$$P\{|T - m| \geqslant d\} \leqslant \alpha,$$

Штейн (Stein, Ann. Math. Statistics, Ch. 1945, **6**, 245—258) предложил следующий метод. Производится выборка объема n_1, вычисляется x_1 — выборочное среднее и s_1^2 — несмещенная оценка дисперсии

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(x_i - \bar{x}_1)^2}{(n_1 - 1)}.$$

Если $s_1 \tau / \sqrt{n_1} \leqslant d$, где τ — 100α-процентное уклонение для закона Стьюдента с $n_1 - 1$ степенями свободы, выборка уже достаточна, и полагаем $T = \bar{x}_1$. Если $s_1 t / \sqrt{n_1} > d$, то производится дополнительная выборка так, чтобы общий объем выборки был целым, не меньшим n, где $n = s_1^2 t^2 / d^2$, и в качестве оценки T принимается $\bar{x}$ — среднее всей совокупности. При этом объем первой части выборки n_1 остается неопределенным.

В работе рассматривается задача о выборе оптимального значения объема первой части выборки n_1, т. е. значения обеспечивающего наименьшее математическое ожидание $E(n)$ объема всей выборки. С этой целью при заданном n_1 и фиксированных α и $c = d/\sigma$, где σ^2 — дисперсия совокупности, выводится формула для подсчета $E(n)$. Приведены таблицы величины $E(n)$ для значений $\alpha = 0{,}01;\ 0{,}05;\ 0{,}02;\ 0{,}01$ и c в пределах от 0,01 до 1,0. Анализ таблиц позволяет приближенно определить оптимальное значение n_1 как в случае, когда известно, что σ лежит в некотором интервале, так и в случае, когда о σ ничего неизвестно. Е. Л. Рвачева

3323. Проблемы последовательного решения для процессов с непрерывным временем. Проверка гипотез. Дворецкий, Кифер, Вольфовиц (Sequential decision problems for processes with continuous time parameter. Testing hypotheses. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 2, 254—264 (англ.)

Широко используя основные идеи и результаты последовательного анализа Вальда (Wald A., Sequential analysis, N. Y., John Wiley and Sons, 1947), авторы изучают вопрос о выборе между двумя простыми гипотезами для процессов с непрерывным временем и стационарными независимыми приращениями. Пусть $\{x_1(t), t \geqslant 0\}$ и $\{x_2(t), t \geqslant 0\}$ — два различных таких процесса и, начиная с $t = 0$, наблюдается процесс $\{x(t)\}$. Требуется произвести выбор между гипотезами H_1: $\{x(t)$ есть $\{x_1(t)\}$ и H_2: $\{x(t)\}$ есть $\{x_2(t)\}$. Процедура принятия решения должна быть такой, чтобы при заданных верхних границах α_1 и α_2 вероятностей ошибок 1 и 2 рода минимизировались $E_i T$ $(i = 1,2)$ — математические ожидания длительности T наблюдений до принятия решения, — если $\{x(t)\} = \{x_i(t)\}$ $(i = 1,2)$. В предположении существования при любых t и x плотностей распределения $f_i(x)$ для $x_i(t)$ рассматривается обычный последовательный анализ Вальда (sequential probability ratio test): даны a и b, $b < 0 < a$; пока $l(t) = \log[f_2(x(t), t) / f_1(x(t), t)]$ находится между b и a непрерывно наблюдается процесс; как только $l(t)$ становится $\leqslant b$, наблюдения прекращаются и принимается H_1; как только $l(t)$ становится $\geqslant a$, принимается H_2. Для такой процедуры сохраняют силу общие свойства последовательного анализа для дискретного случая (оптимальный характер процедуры, тождества Вальда и т. д.).

Подробно изучаются процессы нормальный и Пуассона. При этом обнаруживаются некоторые преимущества непрерывного случая над соответствующим дискретным: простые выражения для α_1 и α_2, которые в дискретном нормальном случае являются только асимптотическими, теперь становятся точными; для процесса Пуассона найденное авторами явное выражение для вероятности приема гипотезы $\{x(t)\} = \{x_s(t)\}$ при процедуре (b, a), если действительное значение параметра есть λ, зависит только от отношения параметров, соответствующих H_1 и H_2. Найдено также явное выражение «моментной функции» для T в процессе Пуассона.

В. С. Михалевич

3324. Проблемы последовательного решения для процессов с непрерывным временем. Задачи оценки. Дворецкий, Кифер, Вольфовиц (Sequential decision problems for processes with continuous time parameter. Problems of estimation. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 3, 403—415 (англ.)

Авторы продолжают (см. реф. 3323) изучение проблемы последовательного анализа для процессов с непрерывным временем с точки зрения общей теории решающих функций (Wald A., Sequential decision functions, 1950). Пусть $X(t, \omega)$, $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$ — семейство стохастических процессов, зависящих от параметра ω, D — пространство возможных решений (в примерах работы $D = \Omega$ или $D \supset \Omega$), $c(t)$ — стоимость наблюдения процесса до момента t включительно, $W(\omega, \sigma)$ — функция потерь, равная убытку, возникающему в результате приема решения σ, если действительное значение параметра есть ω. Процедура принятия решения (оценка) определяется заданием пары функционалов (T, σ) на выборочных кривых $x(t)$, причем σ зависит только от значений $x(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant T$, и правило принятия решения таково: процесс наблюдается непрерывно до времени T, после чего принимается решение σ (если T — константа, не зависящая от $x(t)$, то пару (T, σ) обозначают σ^T). Для каждого ω риск, связанный с процедурой (T, σ), определяют как $R_\omega(T, \sigma) = E_\omega\{c(T) + W(\omega, \sigma)\}$. Оценочная процедура $(\hat{T}, \hat{\sigma})$ называется

минимаксной, если $\sup_\omega R_\omega(\hat{T}, \hat{\sigma}) \leqslant \sup_\omega R_\omega(T, \sigma)$ для всех (T, σ). Для некоторого распределения вероятностей $F(\omega)$ на Ω оценка σ_F^T называется T-бейесовской, если она осуществляет минимум выражения $r_F(\sigma^T) = \int_\Omega r_\omega(\sigma^T)\,dF(\omega)$, где $r_\omega(\sigma^T) = E_\omega W(\omega, \sigma^T)$. Для каждого множества A, для которого определены $P\{x(t) \in A\}$ и $P(A) = \int_\Omega P\{x(t) \in A\}\,dF(\omega) > 0$, обычным образом определяют условное распределение $F(\omega/A)$. Апостериорным риском, соответствующим F и σ^T, называют

$$r_F(\sigma^T/A) = \int_\Omega r_\omega(\sigma^T)\,dF(\omega \mid A).$$

Сделано следующее, легко доказуемое, но важное замечание: пусть для каждого $T \geqslant 0$ существует последовательность распределений $F_n(\omega)$, каждое из которых обладает таким T-бейесовским решением σ_n^T, что $r_{F_n}(\sigma^T/A)$ не зависит от A, и пусть существует σ^T, для которого $r(T) = \sup_\omega r_\omega(\hat{\sigma}^T) = \lim_{n\to\infty} r_{F_n}(\sigma_n^T)$. Тогда, если существует такое $T_0 (0 \leqslant T_0 < \infty)$, что $c(T_0) + r(T_0) = \min_T [c(T) + r(T)]$, то оценка $\hat{\sigma}^{T_0}$ с фиксированным временем T_0 является минимаксной.

С учетом этого и проводится исследование процессов нормального, Пуассона, гамма и отрицательно-биномиального. При некоторых естественных ограничениях на функцию риска $c(t)$ для каждого из них удается при соответствующем выборе функции потери указать последовательность $F_n(\omega)$, удовлетворяющую всем условиям вышеприведенного замечания, т. е. построить оценку σ^{T_0}, являющуюся вместе с тем минимаксной. Например, для процесса Пуассона с $\Omega = \{0 < \lambda < \infty\}$, $D = \{0 \leqslant \lambda < \infty\}$ и функцией потери $W(\lambda, \sigma) = (\sigma - \lambda)^2/\lambda$ минимаксной оценкой будет $\sigma^{T_0} = x(T_0)/T_0$, где T_0 определено из $c(T_0) + T_0^{-1} = \min_T [c(T) + T^{-1}]$. Авторы указывают на возможные обобщения полученных результатов. В. С. Михалевич

3325. Видоизменения разностного метода. Кенуй (Modifications to the variate-difference method. Quenouille M. H.), Biometrika, 1953, **40**, part 3, 4, 383—408 (англ.)

I. Разностный метод исследования временных рядов, начало которому положил Андерсон (Anderson O., Biometrika, 1914, **10**, 269), основан на мысли, что изучение последовательных разностей

$$\nabla^p x_i = x_{i+p} - \binom{p}{1} x_{i+p-1} + \binom{p}{2} x_{i+p-2} - \cdots$$

временного ряда $x_1, x_2, \ldots, x_{N+p}$ дает возможность исключить «гладкую» часть или тренд (вековую составляющую) из ряда, чтобы получить остающуюся часть, которую можно анализировать как случайную и стационарную.

Работа автора преследует две цели: 1) дать более чувствительные, чем в обычном разностном анализе, критерии существования тренда в разностях различных порядков, и дать более точные оценки дисперсий и ковариаций остатка через разности какого-либо порядка, предполагая их свободными от тренда; 2) показать, как должна быть видоизменена теория разностного метода, если в остатке предполагается существование серийной корреляции. Последнее видоизменение не дает точного критерия для разделения тренда и серийной корреляции, но дает некоторые основания для этого разделения.

II. Классический метод разностей дает оценку $(\nabla^p x_i)^2/\binom{2p}{p}$ дисперсии σ^2 случайного элемента, если предположить, что ряд $x_1, x_2, \ldots, x_{N+p}$ свободен от серийной корреляции и что отсутствует вековая составляющая в разности $\nabla^p x_i$. Средняя ряда таких оценок, $V_i = \sum_{i-1}^N (\nabla^p x_i)^2 / N\binom{2p}{p}$, также служит оценкой σ^2. Автор для той же цели дает другие формулы.

Определим $\sum_{(m)} x_i y_i$, полагая

$$\sum_{(0)} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} {}_{(m)}\, x_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1} {}_{(m-1)}\, (x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1})/2.$$

Тогда для каждого ряда $x_1, x_2, \ldots, x_m$ оценки дисперсии будут

$$V_{m,0} = \sum\nolimits_{(m)} x^2/N, \ldots, V_{m,p} = \sum\nolimits_{(m-p)} (\nabla^p x)^2 / N\binom{2p}{p}.$$

Подобным же образом оцениваются серийные коэффициенты корреляции

$$r_{m,p} = \sum\nolimits_{(m-p)} x_i x_{i+p} / \sum\nolimits_{(m)} x_i^2.$$

Далее первый значек в оценках дисперсии и серийного коэффициента корреляции будет пропускаться. Даются решения следующих задач.

Пусть $V_{m+1}, \ldots, V_{m+p}$ свободны от какой-либо вековой составляющей. Тогда, чтобы найти при помощи этих оценок наилучшую оценку остаточной дисперсии, автор ищет такие коэффициенты $c_i > 0$, которые при условии $\Sigma c_i = 1$ доставляют наименьшее значение дисперсии суммы $\sum_{i=m+1}^{m+p} c_i V_i$. Показывается, как решается эта задача, и даются таблицы значений коэффициентов c_i, $i = m+1, \ldots, m+p$ для $m = 0, 1, \ldots, 6$ и $p = 1, 2, 3, 4$.

Затем автор показывает, как может быть оценена вековая составляющая в V_m при помощи $V_{m+1}, \ldots, V_{m+p}$, предполагаемых свободными от тренда. Это достигается разысканием коэффициентов d_i, $i = m+1, \ldots, m+p$, обращающих в минимум дисперсию разности $V_m - \sum_{i=m+1}^{m+p} d_i V_i$. Далее приводятся некоторые свойства коэффициентов и соответствующие таблицы.

III. Формулы автора, относящиеся к корреляционному анализу случайных рядов при помощи разностного способа, вследствие их сложности мы опустим, как и различные его примеры.

Подводя итоги своего исследования автор замечает, что описанный им способ, наверное, более эффективен для случайных рядов, а для неслучайных он, видимо, также более эффективен и дает менее искаженные результаты, чем обычный разностный способ, хотя и требует более длинных вычислений. В. И. Романовский

3326. Распределение квадратичных форм и отношений квадратичных форм. Герленд (Distribution of quadratic forms and ratios of quadratic forms. Gurland John), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 3, 416—427 (англ.)

Пусть случайный вектор $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ имеет нормальное распределение общего (невырожденного) вида; P и Q — любые фиксированные симметрические матрицы из $n \times n$ элементов. Выводятся формулы для распределения случайных величин XQX'; XQX'/XPX' при XPX' неотрицательной. Разбираются частные случаи: XQX' неотрицательна; компоненты X независимы и одинаково распределены, а P и Q диагональны. При выводах применяется теория функций комплексного переменного и данная автором ранее формула (Ann. Math. Statistics, 1948, **19**, 228—237). В некоторых случаях дается разложение полученных функций распределения в ряды по полиномам Лагерра. Ю. В. Линник

3327. Экономичный способ выбора между двумя гипотезами. Дюма (Épreuve économique permettant de choisir entre deux hypothèses. Dumas Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 25, 1628—1629 (англ.)

Урна содержит известное число U шаров. Для выбора между двумя взаимно исключающими гипотезами относительно состава урны

H_0: u_0 белых и $U-u_0$ черных шаров,

H_1: u_1 белых и $U-u_1$ черных шаров

предлагается следующий способ последовательного анализа: результаты последовательных испытаний изображаются точками (x, y), где x — число извлеченных черных шаров и y — число извлеченных белых шаров. В прямоугольнике D $(0 \leqslant x < U-u_1+1,\ 0 \leqslant y < u_0+1)$ намечаются две линии: A (линия приемки H_0) и E (линия браковки H_0). Если точка (x, y) впервые окажется на линии A, либо на правой стороне прямоугольника D раньше, чем на линии E или на верхней стороне прямоугольника — принимается H_0. В противном случае принимается H_1. При заданных ошибках первого (α) и второго (β) рода линии A и E определяются из соотношений:

для точек A:

$$\frac{P\{(x, y)/H_0\}}{P\{(x, y)/H_1\}} \geqslant \frac{1}{\beta};$$

для точек E:

$$\frac{P\{(x, y)/H_0\}}{P\{(x, y)/H_1\}} \leqslant \alpha.$$

В. С. Королюк

3328. Экономичный способ выбора между двумя гипотезами. Дюма (Épreuve économique permettant de choisir entre deux hypothèses. Dumas Maurice), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 1, 40—42 (франц.)

Продолжается изучение метода последовательного анализа, предложенного автором в предыдущей заметке (см. реф. 3327).

В настоящей заметке показывается, что при заданных верхних границах α (β) вероятностей ошибок первого и второго рода «линия приемки» и «линия браковки» H_0 могут быть с достаточной степенью приближения выбраны прямолинейными. Приведены формулы, связывающие уравнения этих прямых с α и β. В. С. Королюк

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

3329. Обнаружение слабых сигналов. Харкевич А. А., Радиотехника, 1953, 8, № 5, 3—7

Автор описывает два известных метода обнаружения радиосигналов, находящихся ниже уровня шумов — метод накопления и корреляционный метод. Первый основывается на том, что при повторении сигнала n раз его накопленная энергия растет пропорционально n^2, в то время как накопленная энергия шумов, накладывающихся на сигнал, растет пропорционально n.

При применении второго метода используют малость корреляционной функции шума при достаточно больших временных сдвигах и периодичность корреляционной функции сигнала.

Ставится важный вопрос о целесообразности использования этих методов в радиотелеграфии. Необходима математическая разработка этого вопроса.

Я. И. Хургин

3330. Распределение меры случайного двумерного множества. Соломон (Distribution of the measure of a random two-dimensional set. Solomon Herbert), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 4, 650—656 (англ.)

На плоскости задан круг радиуса T с центром, отстоящим на расстоянии R от начала координат. Затем на плоскости выбираются независимо друг от друга N точек, каждая в соответствии с круговым двумерным нормальным распределением, центр которого в начале координат. Вокруг каждой из этих точек описывается круг радиуса W. Изучается доля ξ площади первого круга («цели»), покрытая суммой случайных кругов. (Эта задача возникает, например, при расчете вероятности поражения объекта в результате его бомбардировки).

В случае $N=1$ находится способ вычисления величины $P_c = P\{\xi \geqslant c\}$ и строятся графики, позволяющие быстро и практически точно находить по c величину P_c, и наоборот, при всевозможных значениях параметров. Для случая $N=2$ устанавливаются довольно грубые двусторонние оценки для вероятностей P_c.

В многочисленных предыдущих работах на эту тему изучались лишь моменты величины ξ. Одномерный случай разобран в работе Votaw (Votaw D. F., Jr., Ann. Math. Statistics., 1946, **17**, 240—244). Р. Л. Добрушин

3331. Динамика беспорядочных линейных цепей. Дайсон (The dynamics of a disordered linear chain. Dyson Freeman J.), Phys. Rev., 1953, **92**, № 6, 1331—1338 (англ.)

Беспорядочной цепью автор называет систему N одномерных гармонических осцилляторов, каждый из которых связан с ближайшими соседями справа и слева упругими силами, причем массы осцилляторов и упругость каждой связи случайны. Уравнения движения системы имеют вид

$$m_j \ddot{x}_j = K_j(x_{j+1} - x_j) + K_{j-1}(x_{j-1} - x_j). \qquad (1)$$

Задача состоит в вычислении предельного ($N \to \infty$) спектра частот системы (1). Пусть $M(\mu) = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \nu_N(\mu)$, где $\nu_N(\mu)$ — число характеристических частот ω_j системы (1), для которых $\omega_j^2 < \mu$. Вводится характеристическая функция цепи

$$\Omega(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N-1} \sum \ln(1 + x\omega_j^2),$$

зная которую можно определить $D(\mu) = M'(\mu)$ с помощью формулы

$$D(\mu) = (2\pi^2\mu)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh \pi\alpha \, d\alpha \times$$

$$\times \int_0^{\infty} (x\mu)^{-1/2} \cos[\alpha \ln(x\mu)] \; \Omega'(x)\, dx.$$

Характеристическая функция $\Omega(x)$ выражается через коэффициенты системы (1) следующим образом:

$$\Omega(x) = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{2N-1} \ln[1 + \xi(n)], \qquad (2)$$

где

$$\xi(n) = x\lambda_n / (1 + x\lambda_{n+1}) / (\cdots;\ \lambda_{2j-1} = K_j m_j^{-1}, \lambda_{2j} = K_j m_{j+1}^{-1}).$$

Если все λ_j независимы и одинаково распределены с плотностью $G(\lambda)$, то плотность распределения $F(\xi)$ величины $\xi(n)$ не зависит от n и связана с $G(\lambda)$ интегральным уравнением. В этом случае формула (2) заменяется следующей:

$$\Omega(x) = 2\int_0^{\infty} \ln(1+\xi) F(\xi)\, d\xi.$$

При $G(\lambda) = G_n(\lambda) = n^n \lambda^{n-1} e^{-n\lambda} / (n-1)!$ находятся явные выражения для $F_n(\xi)$, $M_n(\mu)$ и исследуется быстрота сходимости при $n \to \infty$ к спектральному распределению $M_\infty(\mu)$ упорядоченной цепи (все $\lambda_j = 1$).

Рассматривается также более сложный и более ес-

ственный случай, когда массы m_j независимы и одинаково распределены, а $K_j = K$ $(j = 1, 2, \ldots)$ фиксированы.

Эта работа возникла в связи с изучением некоторых термических свойств стекла, и рассмотренное в ней решение задачи о линейной цепи служит подходом к случаю трехмерной решетки, для которой аналогичная задача не решена. (Не все положения работы в достаточной мере математически обоснованы. *Прим. реф.*)

И. И. Гихман

3332. Применение статистических методов к сервомеханизмам. Вауэлс (The application of statistical methods to servomechanisms. Vowels R. E.), Austral. J. Appl. Sci., 1953, 4, № 4, 469—488 (англ.)

3333. Проблемы связи с точки зрения теории игр. Мандельброт (Contribution à la théorie mathématique des jeux de communications. Mandelbrot Benoit), Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1953, 2, № 1—2, 124 (франц.)

3334 К. Установление коэффициентов запаса методами математической статистики. Мухадзе, Какушадзе მარაგის კოეფიციენტის განსაზღვრა მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდებით. მუხაძე გ., ქაკუშაძე ა.), 184 стр. თბილისი (Тбилиси) ტექნიკა და შრომა «Техника да шрома», 1954) (груз.)

Книга состоит из двух частей, общей и специальной. В общей части (главы 1—7) изложены вопросы теории вероятностей и математической статистики. Гл. 1. Понятие о статистике и ее связи с теорией вероятностей. Краткий исторический обзор развития теории вероятностей и математической статистики. Гл. 2. Основные понятия теории вероятностей. Закон больших чисел. Дается определение вероятности и приводятся основные теоремы, формулы полной вероятности и теоремы Бейеса. Приведены известные геометрические задачи. Непонятно упоминание в заглавии о законе больших чисел, так как в этой главе о нем ничего не сказано. (*Прим. реф.*). Гл. 3. Понятия математической статистики и случайные переменные. Указываются способы геометрического изображения статистических распределений; определяются интегральные и дифференциальные функции распределения случайных переменных (как авторы называют случайные величины). Гл. 4. Приведены основные числовые характеристики случайных величин и закон больших чисел (теоремы Чебышева и Маркова). Здесь же помещены биномиальный закон распределения и теоремы Бернулли, Лапласса, Пуассона.

Гл. 5. Кривые распределения. Формулируется теорема Ляпунова. Описаны распределения: нормальное, Пуассона, гипергеометрическое, Максвелла. Говорится о композиции законов распределения, упомянуты понятия асимметрии и эксцесса. Указаны некоторые способы анализа эмпирических кривых распределения. Гл. 6. Выборочный метод и критерии согласия. На конкретных примерах разбираются критерии χ^2 и А. Н. Колмогорова. Приведено распределение Стьюдента. В конце главы излагается способ определения объема выборки, необходимого для достижения заданной надежности. В гл. 7 содержатся элементы корелляционного анализа.

Специальная часть содержит две главы, посвященные задачам, указанным в заглавии книги. В конце книги приведены таблицы распределений, употребительных в теории вероятностей и математической статистике.

Примечание референта. В введении авторы пишут, что эта книга может быть использована как руководство по математической статистике для высших технических учебных заведений. Однако в книге совсем опущены некоторые вопросы математической статистики (обработка экспериментальных данных, статистический контроль качества продукции, применение дисперсионного анализа и т. д.), кроме того, затронутые вопросы в большинстве случаев изложены весьма сжато. Некоторые термины переведены на грузинский язык неверно.

В книге имеются опечатки и неточные выражения, например: 1) Явления (A_1 или A_2 или $\cdots$ или A_n) и (A_1 и A_2 и $\cdots$ и A_n) противоположные (стр. 22); 2) $0{,}83 \cdot 70 + 0{,}63 \cdot 30 = 0{,}77$ (стр. 27), 3) на стр. 49 неточно определены непрерывные и дискретные случайные величины; 4) на стр. 71 выводится теорема о дисперсии суммы, но не указано, что эта теорема справедлива только для независимых (или некоррелированных) случайных величин; 5) указано, что для биномиального распределения $D(m) = npq$, но нигде не указано, что $E(m) = np$; 6) на стр. 75 закон больших чисел сформулирован нестрого, и т. д. Специальная часть книги (стр. 148—174) написана значительно аккуратнее, чем общая часть, и полезна для внедрения в производство.

Г. М. Мания

См. также: 2989, 2990

ГЕОМЕТРИЯ

3335. Полуправильные многоугольники и дополнительные многоугольники. Бини (Poligoni semiregulari e poligoni aggiunti. Bini Umberto), Archimede, 1953, 5, № 4—5, 158—164 (итал.)

Во второй части (см. РЖМат, 1955, 2811) рассматриваются те самопересекающиеся (intrecciato) полуправильные многоугольники PSA с $2n$ сторонами, внутренний угол которых равен $180°/n$. Центры дополнительных обыкновенных или звездообразных) многоугольников для многоугольника PSA образуют многоугольник PSL. Центры дополнительных (обыкновенных или звездообразных) многоугольников для многоугольника PSA могут быть вершинами обыкновенного правильного многоугольника только при $\varepsilon = 90°/n$ (ε имеет значение, указанное в первой части). Для полуправильных многоугольников PSL (самопересекающихся или нет) доказываются теоремы:

Центры дополнительных (обыкновенных или звездообразных) многоугольников являются вершинами многоугольника PSA. При этом центры дополнительных квадратов ромба являются вершинами квадрата. Не существует другого полуправильного многоугольника PSL, у которого центры дополнительных обыкновенных правильных многоугольников были бы вершинами обыкновенного правильного многоугольника.

Для полуправильного многоугольника PSL с $2n$ сторонами центры дополнительных правильных звездообразных многоугольников $h = n - 1$ рода являются вершинами обыкновенного правильного многоугольника.

В работе много ошибок. Неверны формулы (9), (11), выражение для $A_{2n}A_1$, A_1A_2 на стр. 161, выражения для O_2O_3, O_4O_5 на стр. 162 и т. д. Эти ошибки не отражаются на заключениях.

Н. Г. Гаспарян

3336. Бобы и бумеранги. Уэдд (Beans and boomerangs. Wedd J. A. D.); Art. and Ind., 1954, 56, № 332, 46—51 (англ.)

На ряде примеров из рисования, черчения, машиностроения, архитектуры и т. д. автор показывает широкое распространение и применение различных геометрических форм. С. И. Зетель

3337. И математические формулы могут быть красивы. Хартштейн (Auch mathematische Formeln können schön sein. Hartstein S.), Orion, 1953, A8, № 21/22, 848—850 (нем.)

Информация о статьях, задачах и рисунках, помещаемых за последние годы в журнале «Scripta math.», имеющих своею целью распространить в широких кругах людей, не являющихся математиками - специалистами, понимание, что математические результаты имеют не только научную и практическую ценность, но и свою специфическую внутреннюю красоту, привлекательное действие которой должно быть использовано при обучении математике. А. М. Лопшиц

3338. Роза, обнаруженная в Ниме. Брун (Nîmes-Rosen. Brun Viggo), Nord. mat. tidskr., 1954, 2, № 3, 110—112 (норв.)

3339. Об «одной недоказанной теореме». Риччи-Мадзоне (Su «un teorema non dimostrato». Ricci Mazzone Filosina), Archimede, 1954, 6, № 2, 78—80 (итал.)

Доказывается высказанная Пюиссаном (L. Puissant, 1769—1843) без доказательства теорема: Центры четырех окружностей, каждая из которых касается трех сторон плоского четырехугольника, лежат на одной окружности. Рассматриваются частные случаи, когда четырехугольник является параллелограммом, прямоугольником, ромбом, квадратом. К. К. Мокрищев

3340. Заметка по поводу статьи Максвелла: «О свойствах круга, проходящего через девять точек». Примроз (Note on Dr. Maxwell's article: «Some properties of the nine-Points circle». Primrose E. J. F.), Math. Gaz., 1954, 38, № 324, 116—117 (англ.)

В статье Максвелла (Math. Gaz., 1947, 31, 266—269) дано по методу сокращенных обозначений выражение для прямых и кругов, связанных с треугольником ABC, через четыре из них. В настоящей заметке это же сделано для медиан, для кругов ADB, ADC, где D — середина BC, и для эйлеровой прямой. Я. П. Бланк.

3341. Цепь кругов, ассоциированная с пятисторонником. Клосон (A chain of circles associated with the 5-line. Clawson J. W.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 3, 161—166 (англ.)

Цепью Клиффорда называется следующая конструкция. Две прямые l_1, l_2 определяют точку A_{12}. Три прямые l_1, l_2, l_3 определяют окружность, описанную около треугольника A_{12}, A_{23}, A_{31}. Четыре прямые определяют точку, через которую проходят четыре окружности, соответствующие каждой тройке этих прямых. Пять прямых определяют окружность, на которой расположены пять точек, соответствующих пяти четверкам этих прямых.

Таким образом, каждому $2n$-стороннику соответствует точка Клиффорда, а каждому $2n+1$-стороннику — окружность Клиффорда.

В случае пятисторонника $l_1l_2l_3l_4l_5$, если обозначить A_{ik} точку пересечения прямых l_i, l_k, γ_{45} — окружность, описанную около треугольника A_{12}, A_{23}, A_{31} и C_{45} — ее центр, имеют место следующие предложения:

а) Окружности $\gamma_{12}, \ldots, \gamma_{15}$ имеют общую точку F_1.

б) Точки $C_{12}, \ldots, C_{15}$, F лежат на окружности γ_1 с центром C_1. Существует пять точек F_i и пять кругов γ_i.

в) Точки $F_1, \ldots, F_5$ лежат на окружности Клиффорда Ф пятисторонника с центром F.

г) Окружности $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$ имеют общую точку K.

д) Точки $C_1, \ldots, C_5$ лежат на круге γ с центром C.

е) Окружность Клиффорда Ф пятисторонника проходит через точку K.

К этим предложениям, представляющим приложения теорем Клиффорда, Морлея, Лонгшана (Clifford, Morley, de Longchamps) к пятисторонникам, автор добавляет новые предложения.

Прямые F_iA_{jk}, F_jA_{ki}, F_kA_{ij} проходят через точки, лежащую на окружности Ф.

ж) Точка K и центр F окружности Ф находятся в инверсии относительно круга γ.

Подвергнув инверсии окружности γ_i относительно круга произвольного радиуса с центром в K, получаем прямые c_i. Для пятисторонника, образованного прямыми c_i, имеют место теоремы, аналогичные теоремам а) — ж) основного пятиугольника. Повторная инверсия относительно того же круга позволяет автору сформулировать ряд новых предложений относительно основного пятисторонника. Я. П. Бланк

3342. Конхоида и отрицательный круг. Адамс (Conchoid and negative circle. Adams George) Elem. Math., 1953, 8, № 6, 129—136; 1954, 9, № 1, 9—16 (англ.)

Отрицательно-евклидово пространство характеризуется наличием «абсолютной» («бесконечно удаленной») точки O. Удобно рассматривать два совмещенных пространства — отрицательно-евклидово и положительно-евклидово, последнее с бесконечно удаленной плоскостью ω, причем O не принадлежит ω. Точка O вместе с абсолютным кругом в плоскости ω определяет абсолютный конус.

В положительно-евклидовом пространстве возьмем за начало координат, в отрицательно-евклидовом ω за начальную плоскость. Будем совместно рассматривать положительно-евклидовы (точечные) и отрицательно-евклидовы (плоскостные) координаты. Единицу расстояний подберем так, чтобы «отрицательное расстояние» (термин «отрицательный» всюду обозначает «отрицательно-евклидов») между двумя плоскостями равнялась «положительному расстоянию» между полюсами относительно единичной сферы. Единичную сферу выбираем мнимой. Если OX, OY, OZ — декартова прямоугольная система, то ее координатные плоскости в пересечении с ω дают оси координат отрицательно-евклидова пространства. При таком выборе координатных систем многие формулы при переходе в другое пространство получаются заменой всех величин на обратные. Например, формуле $\frac{1}{P^2} = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}$ (X, Y, Z — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях, P — ее расстояние от начала) соответствует формула $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, в которой r может быть истолкована как отрицательное расстояние плоскости от начальной плоскости ω, а x, y, z — как его прямоугольные составляющие.

В работе исследуется отрицательный круг и соответствующие отрицательные вращения. Отрицательный круг — плоская кривая (для удобства положим, что ее плоскость проходит через O), все касательные которой находятся на постоянном отрицательном расстоянии от некоторой прямой c (центральная линия). С положительно-евклидовой точки зрения это — кривая второго порядка с фокусом O и директрисой c. Отрицательный круг определяется двумя параметрами: отрицательным радиусом r и отрицательным расстоянием m его центральной линии c от прямой, по которой его плоскость пересекает ω.

Рассматривается прибор «отрицательный циркуль». Построение отрицательного круга тесно связано с парой конхоид Никомеда. Устанавливается истолкование конхоиды с отрицательно-евклидовой точки

рения. Изучается трехмерный случай (отрицательная фера). Вместо конхоид возникают поверхности

$$\left[(X^2+Y^2+Z^2+m^2W^2)\left(Z+\frac{W}{m}\right)^2-r^2Z^2W^2\right]^2=$$
$$=4m^2W^2(X^2+Y^2)\left(Z+\frac{W}{m}\right)^4$$

(X, Y, Z, W — однородные точечные координаты).

Н. М. Бескин

3343. **Об инверсии. Шустер** (O inversi. Schuster Jan), Věst. Královské české společ. nauk. Třída mat.-přírodověd., 1953 (1952), 1—25 (чеш., резюме франц.)

По уравнениям двух окружностей на плоскости находится центр и степень той инверсии, которая переводит одну из данных окружностей в другую. Та же задача решается для двух сфер в пространстве. Аналогичная задача решается на проективной плоскости и в проективном пространстве для двух кривых или поверхностей второго порядка, проективно-эквивалентных двум окружностям или сферам, и для преобразования, проективно-эквивалентного инверсии.

Примечание референта. Эту задачу можно решить более просто, если воспользоваться тем, что множество всех окружностей на плоскости (всех сфер в пространстве), если считать за расстояние между двумя окружностями (сферами) угол между ними, изометрично 3-мерному (4-мерному) неевклидову пространству, координаты точек которого являются тетрациклическими координатами окружностей (пентасферическими координатами сфер), и что при этом инверсия относительно окружности (сферы) изображается отражением от точки, изображающей эту окружность (сферу). В этой интерпретации основная задача реферируемой работы сводится к задаче определения середины отрезка, соединяющего две данные точки; эта задача в неевклидовом пространстве имеет два решения, одно из которых может быть идеальной точкой, изображающей мнимую окружность (сферу), т. е. соответствующей инверсии отрицательной степени. Б. А. Розенфельд

3344. **Об обычной циклоиде. Блаттер** (Über die gemeine Zykloide. Blatter Christian), Elem. Math., 1954, 9, № 4, 80—81 (нем.)

Без применения интегрального исчисления доказывается, что длина дуги одного периода циклоиды равна учетверенному диаметру образующего круга, а площадь — утроенной площади круга. С этой целью окружность заменяется вписанным правильным $2n$-угольником, который катится по прямой так, что стороны его последовательно совпадают с прямой, вращаясь около своей вершины. При этом произвольно взятая вершина описывает кривую, состоящую из дуг окружностей. При $n\to\infty$ длина дуги и площадь ее определяют длину дуги и площадь циклоиды.

Ф. В. Широков

3345 К. **Высшая геометрия. Ефимов Н. В.** (Учеб. пособие для гос. ун-тов и пед. ин-тов), изд. 3-е, перераб. 528 стр., М., Гостехиздат, 1953, 12 р. 10 к.

Настоящее издание отличается от предыдущего многими исправлениями и улучшениями. Содержание книги разделено на три части.

Часть I: гл. 1. Краткий обзор исследований по основаниям геометрии; гл. 2. Аксиомы элементарной геометрии; гл. 3. Неевклидова теория параллельных; гл. 4. Исследование аксиом элементарной геометрии.

Часть II: гл. 5. Основы проективной геометрии; гл. 6. Теоретико-групповые принципы геометрии. Группы преобразований.

Часть III. Геометрия постоянной кривизны; гл. 7. Дифференциальные свойства неевклидовой метрики; гл. 8. Пространственные формы геометрии постоянной кривизны.

Указатели — предметный и авторский — отсутствуют.

М. К. Керимов

3346 К. **Введение в интегральную геометрию. Сантало** (Introduction to integral geometry. Santaló Luis A., 127 p., fig., Paris, Hermann (impr. de Jouve), 1953, 1.500 fr.), Bibliogr. France, 1954, 143, ser. 5, 232 (библ.)

3347 К. **Введение в векторное и тензорное исчисление с учетом его физического значения. Шмидт** (Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung unter besonderer Berücksichtigung ihrer physikalischen Bedeutung. Schmidt Harry, 116 S.), VEB Verlag Technik, Berlin, 1953, 9.00 DM (библ.)

3348 К. **Координатная геометрия. Такки, Армистед** (Coordinate geometry. Tuckey C. O., Armistead W. XI+464 p., Longmans, 1953, 12 s. 6 d.), Math. Gaz., 1953, Dec., XVI (библ.)

3349 К. **Высшая математика. Ч. I. Аналитическая геометрия. Брадистилов** (Висша математика Ч. I. Аналитична геометрия. Брадистилов, Георги, изд. 2-е, VII+366 с.,С., Наука и изкуство, 1954, 13: 78 лв.), Българска книгопис, 1954, 58 № 8, 277 (библ.)

3350 К. **Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Цубербиллер О. Н.** Изд. 18-е, стереотипное, 356 стр, М., ГИТТЛ, 1954, 8 р. 5 к.

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

3351. **Вычисление двугранных углов. Джонсон** (Calculation of dihedral angles. Johnson William W.), Prod. Engng, 1953, 24, № 8, 213, 215, 217 (англ.)

Формулы сферической тригонометрии использованы для вычисления углов, необходимых при изготовлении изделий из листового металла. Дан пример вычисления.

Л. П. Пеллинен

3352. **Построение двойных точек линии, описываемой точкой, связанной с шатуном шарнирного четырехзвенника. Шмид** (Konstruktion der Doppelpunkte einer Koppelkurve. Schmid Wilhelm). Ber. Mathematiker-Tagung, Berlin, 1953, 271—279 (нем.)

Автором дан геометрический способ построения двойных точек кривой, описываемой точкой, жестко связанной с шатуном механизма шарнирного четырехзвенника (Артоболевский И. И., Теория механизмов и машин, М., Гостехиздат, 1953, 177), основанный на использовании изогональной инверсии относительно треугольника, вершинами которого являются двойные точки этой кривой, и основных фактах теории проективного соответствия рядов точек первого и второго порядков.

Этот способ применим и в том случае, когда две из двойных точек будут мнимыми сопряженными.

К. К. Мокрищев

3353. **Особые случаи выравнивания круговых кривых упрощенным геометрическим способом. Петров** (Особени случаи при изравняване на кръгови криви по опростения геометрически начин. Петров М.), Техника (София), 1954, № 8, 11—14 (болг.)

Рассматривается задача, находящая применение в дорожном строительстве: провести окружность, зная близкие к ней точки (x_i, y_i). Автор указывает, что эту задачу невыгодно решать по способу наименьших квадратов из-за сложности вычислений, и предлагает для ее решения следующий прием. Составляем равенства:

$$v_i = R - \sqrt{(x_i-m)^2+(y_i-n)^2} \quad (i=1,\ldots,s) \quad (1)$$

где R — радиус искомой окружности, m и n — координаты ее центра. Считая, что сумма погрешностей $[v]$ равна нулю, и пренебрегая суммой их квадратов $[vv]$, получим из (1):

$$sm^2 - 2m[x] - 2n[y] + sn^2 - sR^2 + [xx] + [yy] = 0. \quad (2)$$

Пусть имеются дополнительные данные: а) величина R и уравнение касательной $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha + a$, или б) точка искомой окружности и уравнение касательной, или в) две точки искомой окружности. Тогда величины m и n могут быть вычислены (например, в случае а) из уравнений (2) и $n = m\,\mathrm{tg}\,\alpha + a + R/\cos\alpha$).

Автор показывает, что допущение $[vv] = 0$ приводит в отношении величины m к погрешности, практически равной нулю.

На стр. 12 вместо $m = \pm b\sqrt{b^2 - c}$ должно быть $m = b \pm \sqrt{b^2 - c}$. В тексте статьи автор называет свой метод параболическим, ошибочно считая, что уравнение (2) с переменными m и n определяет параболу.

А. С. Смогоржевский

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3354. Проективные и неевклидовы геометрии над матрицами. Джавадов М. А., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 5, 769—772

Рассматриваются проективные пространства, координаты точек которых являются вещественными и комплексными матрицами. Теория этих пространств аналогична теории проективных пространств над телами, но наличие делителей нуля в кольцах матриц приводит к ряду особенностей этих пространств (в частности, в них не выполняются обычные аксиомы сочетания проективного пространства). В работе находится вид коллинеаций и корреляций в проективных пространствах над матрицами и показывается, что линейная конгруэнция прямых в $(2n+1)$-мерном проективном пространстве над вещественными матрицами m-го порядка является моделью n-мерного проективного пространства над комплексными матрицами того же порядка, а линейная конгруэнция прямых в $(2n+1)$-мерном проективном пространстве над комплексными матрицами m-го порядка является моделью n-мерного проективного пространства над вещественными матрицами $2m$-го порядка. В проективных пространствах над матрицами определяется неевклидова метрика и находится вид движений в полученных неевклидовых пространствах. Частными случаями полученных неевклидовых пространств являются пространства, рассматривавшиеся Хуа Ло-геном (Докл. АН СССР, 1946, 53) и референтом (Сб. «125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского», М.—Л., 1951). Б. А. Розенфельд

3355. Малая теорема Дезарга и двойственность в проективных плоскостях. Ленц (Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. Lenz Hanfried), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1954, 57, № 1, 20—31 (нем.)

Как основной результат дана следующая теорема: Совокупность всех осей и соответствующих им центров, для которых справедлива малая теорема Дезарга, образуют фигуру F, переходящую в себя при любой коллинеации и относящуюся к одному из таких типов: 1) нет ни осей, ни центров; 2) одна ось и один центр на ней; 3) все оси проходят через одну точку, не являющуюся центром; все центры лежат на одной прямой, не являющейся осью; 4, а) одна ось a, все точки на a и только они — центры; 4, б) один центр A, все прямые, проходящие через A, и только они — оси; 5) существует точка A и прямая $a \ni A$ такие, что все точки на a и только они — центры, а все прямые, проходящие через A, и только они — оси; 6, а) каждая прямая — ось, все центры лежат на фиксированной прямой; 6, б) каждая точка — центр, все оси проходят через фиксированную точку; 7) каждая точка — центр, каждая прямая — ось. Из основной теоремы выводится, что проективная плоскость над почти-телом (Fastkörper), не являющимся телом, не может быть автодуальной. Уравнение прямой автор записывает в форме $b + ax + y = 0$ вместо $y = xa + b$ в других работах. Это вызывает изменение алгебраических эквивалентов для некоторых конфигурационных теорем.

Л. А. Скорняков

3356. К проблеме трансверсалей. Часть II. К проблеме 9 плоскостей в R_5. Вейценбёк (Zum Transversalenproblem. Teil II: Zum 9-Ebenenproblem in R_5. Weitzenböck Roland), Monatsh. Math., 1954, 57, № 4, 265—306 (нем.)

Решается задача об эффективном определении 42 плоскостей (трансверсалей), пересекающих заданные в общем положении 9 плоскостей в 5-мерном проективном пространстве (РЖМат, 1955, 2875). Пусть $1^3, 2^3, \ldots, 9^3$ — заданные плоскости. Выбрав какие-либо точки A на 1^3 и B на 2^3, можно, вообще говоря, провести через них единственную плоскость T_{1234}, пересекающую 3^3, 4^3 и 5^3. Для того чтобы она пересекала также и 6^3, должно выполняться условие:

$$K_{3456}(AB) = \begin{vmatrix} (AB3^36') & (AB4^36') & (AB5^36') \\ (AB3^36'') & (AB4^36'') & (AB5^36'') \\ (AB3^36''') & (AB4^36''') & (AB5^36''') \end{vmatrix} = 0$$

(через $6'$, $6''$, $6'''$ обозначены точки, определяющие плоскость 6^3).

Если точки пересечения B_3, B_4, B_5 плоскости 2^3 с пространствами $(A3^3)$, $(A4^3)$, $(A5^3)$ неколлинеарны, то любую точку B можно представить в виде $x_1B_1 + x_2B_2 + x_3B_3$. Если A зафиксировать, то уравнение $K_{3456}(AB) = 0$ определит кривую третьего порядка на плоскости 2^3. Аналогично получаются кривые $K_{3457}(AB) = 0$ и $K_{3458}(AB) = 0$. Они заведомо проходят через четыре точки B_3, B_4, B_5, B_{345}, для которых трансверсаль T_{12345} является неопределенной, и уравнение $K_{345\pi} = 0$ выполняется тождественно для любой плоскости π^2. Определяется условие, при котором они имеют еще по крайней мере одну общую точку B^* — соответствующая трансверсаль пересечет тогда все плоскости с 1^3 до 8^3. Из системы уравнений $K_{345i}(AB) = 0$ ($i = 6, 7, 8$) посредством умножения на подходящие квадратичные формы от x_i и сложения можно получить систему

$$\begin{cases} x_1x_2x_3L_3\Lambda = 0, \\ x_1x_2x_3L_4M = 0, \\ x_1x_2x_3L_5N = 0, \end{cases}$$

где $L_3 = 0$, $L_4 = 0$, $L_5 = 0$ — уравнения прямых, соединяющих B_{345} с B_3, B_4, B_5. Точка B^*, вообще говоря, должна являться пересечением прямых $\Lambda = 0$, $M = 0$, $N = 0$, что дает:

$$\Delta_\lambda^{678}(A) = (\Lambda MN) = 0.$$

Точки A^*, для которых это условие удовлетворяется, лежат на кривой (135-го порядка) плоскости 1^3. Точки A^{**}, через которые проходит трансверсаль $T_{12345678}$, будут находиться среди точек пересечения кривых $\Delta_\lambda^{678}(A) = 0$ и $\Delta_\lambda^{679}(A) = 0$. Фактическое определение этих точек не завершено.

Подробно проведены вычисления и разобраны различные специальные и особые случаи. И. З. Розенкнот

357. «Конические инволюции» с кривой коинциденции порядка $4n+2$. Т а л ь б е р г («Conic involutions» with a coincident curve of order $4n+2$. T h a l b e r g O l a f M.), Avhandl. utg. Norske vidensk.-akad. Oslo I. Mat.-naturvidens Kl., 1953, № 2, 1—15 (англ.)

Исследования «конических инволюций», т. е. плоских инволюций, в которых две соответственные точки всегда лежат на коническом сечении K, проходящем через четыре заданные точки a, b, c, d. В первой работе (Avhandl. utg. Norske vidensk.-akad. Oslo, 1947, № 1) автор предполагал, что две точки коинциденции на K меняются вместе с K, и рассматривал тот случай, когда кривая коинциденции порядка $4n+1$ с точками кратности $2n$ в каждой из четырех базисных точек пучка конических сечений.

Во второй работе (там же, 1952, № 1) автор предполагал, что кривая коинциденции есть коническое сечение, проходящее через a и b, но не проходящее через точки c и d. В данной работе сначала разбирается случай, когда кривая коинциденции — кривая 6-го порядка, проходящая через точки a^3, b^3, c^2, d^2, затем случай, когда кривая коинциденции порядка $4n+2$, проходящая через точки a^{2n+1}, b^{2n+1}, c^{2n}, d^{2n} (базисные точки с указанными кратностями). В первом случае кривая коинциденции 6-го порядка, имеющая трехкратные точки в a и b и двукратные в точках c и d, обозначается через C, ее два оставшихся пересечения с коническим сечением K пучка через точки a, b, c, d дадут на K две переменных точки коинциденции. В пучке (K) имеется шесть конических сечений E, F, G, H, I и J, касающихся C соответственно в точке e, f, g, h, i, j. Введем точки пересечения прямых, соединяющих базисные точки попарно, именно положим $\delta = (ab, cd)$, $\delta_1 = (ac, bd)$, $\delta_2 = (ad, bc)$; пусть далее α и β будут две точки пересечения прямой cd с кривой C сверх точек c^2 и d^2, наконец, на этой же прямой пусть γ будет точкой гармонически сопряженной с δ относительно α и β. Тогда δ_1 и δ_2 будут двумя изолированными точками коинциденции, и если порядок инволюции равен n, то кратность ее фундаментальных точек a, b, c, d, для точек первой пары равна $n/2$, для точек второй пары $n/2-1$; отсюда, так как C взята 6-го порядка, он находит порядок инволюции $n=14$. Инволюция будет иметь одиннадцать фундаментальных точек с соответствующими кратностями: a^7, b^7, c^6, d^6, e^2, f^2, g^2, h^2, i^2, j^2, γ^1, и условия Кремоны выполняются. Рассматривая преобразования ∞^2 прямых плоскости, автор устанавливает, что данная инволюция будет 4-го класса (по классификации Капорали). Фундаментальная кривая для точки a будет уникурсальной кривой 7-го порядка, проходящей через a^3, b^4, c^3, d^2, e, f, g, h, i, j, γ, и фундаментальная кривая для c будет уникурсальной кривой 6-го порядка, проходящей через a^3, b^3, c^2, d^3, e, f, g, h, i, j, аналогично для b и d. В дальнейшем исследуются другие (сверх K и C) полусопряженные кривые (кривые Бертини), случаи распадения кривой C на две кривые 3-го порядка через a^2, b, c, d и через a, b^2, c, d; показано, что если одна из точек δ_1 или δ_2 окажется на C, то порядок инволюции понижается на 2, если обе эти точки лежат на C, то получится инволюция 10-го порядка и 2-го класса. Аналогично ведется исследование случая, когда кривая C порядка $4n+2$ имеет в точках a и b кратность $2n+1$ и в точках c и d кратность $2n$, она будет жанра $2n$ и касается $4n+2$ конических сечений пучка (K). Тем же способом находится порядок инволюции $x=8n+6$, фундаментальная кривая точки a будет уникурсальной кривой порядка $4n+3$, содержащей точки a^{2n+1}, b^{2n+2}, c^{2n+1}, d^{2n+1}, γ, e, f, g, h, i, j, и фундаментальная кривая для точки c будет уникурсальной кривой порядка $4n+2$, проходящей через точки a^{2n+1}, b^{2n+1}, c^{2n}, d^{2n+1}, e, f, g, h, i, j, класс инволюции будет $2n+2$.

Геометрическое соотношение между фундаментальными точками и точками δ_1, δ_2 выясняется в виде теоремы: Существует самосопряженная кривая порядка $2n+2$ жанра n, содержащая точки a^{n+1}, b^{n+1}, c^n, d^n, e, f, g, h, i, j и точки δ_1 и δ_2, которая будет гармонической полярой C относительно четверки полюсов a, b, c, d. Аналогично показывается, что существует ∞^1 самосопряженных кривых (гармоническая поляра к C) порядка $2n+3$ и жанра $n+1$, проходящих через точки a^{n+1}, b^{n+1}, c^{n+1}, d^{n+1}, γ, δ_1, δ_2, e, f, g, h, i, j. Автор не указывает, в каком отношении его работа находится к работам Бертини (определившим все инволюции классов 0, 1, 2) и Маринетти (исследовавшим инволюции классов 3, 4). С. С. Бюшгенс

3358. О дуге кривой второго порядка на плоскости Лобачевского. М о р д у х а й - Б о л т о в с к о й Д. Д., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 3, 449—450

Уравнения эллипса $Ax^2+By^2-Cz^2=0$, $x^2+y^2-k^2z^2=-k^2$ (реального в случае $C/B<C/A<k^2$) можно параметризовать эллиптическими функциями Якоби с мнимым модулем: $\lambda^2=C(A-B)/B(Ak^2-C)$. Дуга s такого эллипса выражается интегралом

$$s=\int\sqrt{\alpha^2\,\mathrm{cn}^2\,t\,\mathrm{dn}^2\,t+\beta^2\,\mathrm{sn}^2\,t\,\mathrm{dn}^2\,t-k^2\lambda^4\gamma^2\,\mathrm{sn}^2\,t\,\mathrm{cn}^2\,t}\,dt,$$

который приводится к ультраэллиптическому интегралу 2-го рода. Без доказательства утверждается, что на основании теоремы Абеля можно найти спрямляемую сумму дуг $s_2+s_3-s_1$, а для упрощения больших выкладок предлагается использовать интегралы якобиевых уравнений.

Делается замечание о возможности проведения аналогичных исследований для полуреального эллипса $(C/B<k^2<C/A)$ и для реальной гиперболы.

В статье имеются опечатки. Для реального эллипса надо обозначить: $\gamma^2=Bk^2/(Bk^2-C)$, λ^2 и s приведены выше в исправленном виде. Для полуреального эллипса в системе (11) надо заменить x' на λ и в параметрических уравнениях (12) для z надо заменить λ/λ' на λ'/λ, причем параметры должны иметь такой смысл: $Ck^2/(Bk^2-C)=-\beta^2$, $Bk^2/(Bk^2-C)=-\gamma^2$, $(A-B)/Bk^2=1/\lambda^2\alpha^2$, $1/\lambda^2=(A-B)C/B(Ak^2-C)>0$ и λ' есть дополнительный модуль, т. е. $\lambda^2+\lambda'^2=1$. В случае реальной гиперболы в параметрических уравнениях (14) для y надо заменить λ на λ^2 и для z — заменить λ на λ/λ'; параметры же имеют следующий смысл: $Ck^2/(Bk^2+C)=\lambda^2\beta^2$, $\lambda'^2/\alpha^2=-(A+B)/Bk^2$, $\lambda'^2/\gamma^2=Bk^2(Bk^2+C)$. В. С. Люкшин

3359. Объем пирамиды в пространстве Лобачевского. Л а п т е в Б. Л., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954. 114, № 2, 53—77

Дается связный вывод двух формул, выражающих объем конечной прямоугольно-треугольной пирамиды (т. е. пирамиды, основанием которой служит прямоугольный треугольник, а высотой — перпендикуляр, восставленный в вершине острого угла) через значения трансцендентной функции Лобачевского $L(x)$ от трех двугранных углов λ; μ; ν пирамиды, отличных от прямого угла. Соответствующий вывод имеется в работах Лобачевского: «О началах геометрии» и «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам». Но у Лобачевского отдельные этапы вывода рассеяны среди многочисленных выкладок, связанных с решением основной задачи — отыскания значения определенных интегралов. В ряде случаев автор упрощает выкладки Лобачевского.

Последовательным интегрированием элемента объема в сферических (полярных) координатах (§ 2) и в

координатах Лобачевского (декартовых) (§ 3) выводится формула для объема бесконечно тонкого прямоугольно-треугольного клина, затем, при стремлении высоты клина к ∞, получается объем бесконечно тонкого асимптотического прямоугольно-треугольного клина и, наконец, объем асимптотической прямоугольно-треугольной пирамиды. Последний результат выражается через трансцендентную функцию $L(x)$. Из сравнения результатов решения в сферических координатах и координатах Лобачевского получается выражение интеграла

$$\int_0^b \frac{ydy}{\operatorname{ch} 2y/k - \cos 2B} \qquad (1)$$

через функцию $L(x)$.

В § 4 дается одно выражение для объема конечной прямоугольно-треугольной пирамиды путем сведения его к алгебраической сумме найденных ранее объемов четырех прямоугольно-асимптотических пирамид, а в § 5, в результате интегрирования элементарной треугольной пластинки и использования значения интеграла (1),— другое, более простое выражение того же объема. Н. М. Несторович

3360. Искажения линейных и угловых величин в определенных плоскостях пространства, изображенных в аффинных проекциях. Рылов А. П., Тр. Северо-Кавказск. горно-металлург. ин-та, 1954, № 2, 39—60

Рассматривается «аффинная» (т. е. параллельная) проекция произвольной плоскости P на плоскость изображений и исследуются показатели искажений для различных направлений на плоскости P. Строится номограмма искажений окружностей плоскости P в форме концентрических подобных эллипсов. Работа предназначена для применения в горном деле и имеет целью дать простые способы измерения линейных и угловых величин в данной плоскости пласта или жилы, изображенных в аффинных координатах.

Н. Ф. Четверухин

3361 К. Введение в проективную геометрию. Карвалью (Introducao à geometria projetiva. Carvalho Moema M. de Sá, X+170 p., Rio de Janeiro, Fáculdade nacional de filosofia, 1953, Cr & 80.00), Bol. bibliogr. brasileiro, 1953, **1**, № 5, 18 (библ.)

3362 К. Начертательная и проективная геометрия. Часть вторая. Проективная геометрия. Фрола (Geometria descrittiva e proiettiva. Parte seconda: Geometria proiettiva. Frola Eugenio, 175 p., Torino, Gheroni, 1953), Bibliogr. ital., 1953, № 8 (628), 326 (библ.)

3363 К. Основные понятия проективной геометрии. Вышин (Základni pojmy projektivni geometrie. Vyšin Jan. 138 s., 13 s. obr. příl., Praha, SPN, 1953, 16 Kčs.), Česká kniha, 1953, № 51, 1022 (библ.).

3364 К. Проективная геометрия. Прюфер (Projektive Geometrie. Prüfer H. 2. Aufl., VII+ +314 S., 254 Abb., Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig R.-G., 1953, 10.00 DM), Verlagkataloge, 1953, 6 (библ.)

3365 К. Проективная геометрия в задачах. Житомирский О. К., 184 стр., М., Гостехиздат, 1954, 3 р. 80 к.

3366 К. Начертательная геометрия. Т. 2. Проекции кривых и поверхностей. Родригес (Geometria descritiva, 2 vol., Projectividades curvas e superficies. Rodrigues Alvaro José, 2 ed. aum., 409 p., Rio de Janeiro, Agir., 1953, 100.00 doll.), Bol. bibliogr. brasileiro, 1953, **1**, № 3, 15 (библ.)

3367 К. Начертательная геометрия. Лакур (Geometria descritiva. Lacourt H. 152 pp., Ri de Janeiro (Conquista), 1953, 50.00 doll.), Bol. b bliogr. brasileiro, 1953, **1**, № 2, 8 (библ.)

3368 К. Начертательная геометрия с прикладным примерами для учащихся и работающих инженеров Аппель (Darstellende Geometrie m. angewandte Beisp. f. d. studierenden u. tätigen Ing. Appel G 132 S., 1954, 6.50 DM), Neue techn. Bücher, 1954 **31**, Ausg. 3, 36 (библ.)

3369 К. Начертательная геометрия. Ч. 2. Урбан (Deskriptivni geometrie. 2 Část. Urban Aloi 178 s.,Praha, Přehl. lit., 1954, 9.40 Kčs.), Česká kniha 1954, № 25, 705—706 (библ.)

3370 Д. О некоторых специальных вопросах теории геометрических построений в плоскости Лобачевского. Кирищиев Р. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ростовск.-на-Дону. ун-т, Ростов-на-Дону, 1954

3371 Д. Построение линии пересечения поверхностей топологическими преобразованиями и графомеханическими способами. Малахов Н. А. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. технол. ин-т им. Ленсовета, Л., 1954

3372 Д. Квадратичная система конических сечений и ее применение к решению некоторых задач линейной геометрии и номографии. Ермолаева Т. А. Автореф дисс. канд.физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1954

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3373. Якобиево многообразие алгебраической кривой. Чжоу Вэй-лян (The Jacobian variety of an algebraic curve. Chow Wei-Liang). Amer. J. Math., 1954, **76**, № 2, 453—476 (англ.)

Пусть C — алгебраическая кривая рода g без особенностей в проективном пространстве $[m]$ над полем k. Для C можно построить группу всех дивизоров $G(C)$, группу главных дивизоров $G_l(C)$ и группу всех дивизоров степени нуль $G_a(C)$. Пусть K — надполе k. Многообразие (м.) J над K называется якобиевым м. кривой C (если оно существует, то определяется с точностью до бирационального изоморфизма), если оно удовлетворяет следующим условиям: 1) J есть абелево м. над K; 2) существует гомоморфное отображение Φ (канонический гомоморфизм) $G_a(C)$ в J с ядром $G_l(C)$; 3) гомоморфизм Φ рационален и определен над K так, что если $\mathfrak{p}_u$ — рациональный дивизор над $K(u)$, где (u) — произвольный набор элементов, то $\Phi(\mathfrak{p}_u)$ рационален над $K(u)$, и если $\mathfrak{p}_\mu$ — какая-либо специализация $\mathfrak{p}_u$ над специализацией $(u) \to (\mu)$ над k, то $\Phi(\mathfrak{p}_\mu)$ — специализация $\Phi(\mathfrak{p}_u)$ над той же специализацией; 4) Φ обладает свойством «универсального отображения»: если Ψ любой рациональный гомоморфизм $G_a(C)$ в абелево м. A, то $\Psi = \Phi\Xi$, где Ξ — рациональный гомоморфизм J в A.

Вопрос существования якобиевых м. в случае, когда основное поле — поле комплексных чисел, решается трансцендентным путем (рассмотрение абелевых дифференциалов 1-го рода на C). В случае произвольного поля решение вопроса существования абстрактного якобиева м. получено А. Вейлем (Weil A., Varietes abeliennes et courbes algebriques, Paris, 1948), причем нерешенными остались вопросы о существовании якобиева м. как проективного алгебраического м., и о поле определения якобиева м. и канонического гомоморфизма.

В работе решаются оба вопроса: показано, что якобиево м. существует как м. в проективном простран-

... и что как якобиево м., так и канонический го-...морфизм определяются над полем определения ...вой C.

Основная идея построения якобиева м. следующая. ...ожительные дивизоры степени n в C могут быть ...ставлены как точки проективного пространства $[t]$ ...ожительный дивизор p есть 0-цикл в $[m]$ и, ...довательно, представим посредством присоединенной ...мы $p(V) = \sum_0^t p_i \Omega_i(V)$, где $\Omega_i(V)$ — степенные про-...ведения степени n в (V), расположенные в фиксиро-...ном порядке, иными словами — представим точкой ..., p_t). Пусть C^n — м. точек, представляющих ...занным образом в $[t]$ положительные дивизоры ...пени n в C. Естественно рассмотреть C^g. Если бы ...ки C^g находились во взаимно однозначном соответ-...ии с классами дивизоров D_g, то при условии неосо-...ности C^g оно являлось бы якобиевым м., однако ...имная однозначность соответствия нарушается су-...ствованием специальных классов дивизоров, которые ...дут представляться не точками, а некоторыми под-...огообразиями C^g. Возникающее затруднение обхо-...тся автором посредством такого приема: вместо C^g ...сматривается C^n при $n > 2g-2$; при этом в D_n спе-...альных классов дивизоров не будет и каждый ди-...зор степени n представится как подмногообразие м. ... размерности $n-g$. Применяя вновь метод присо-...иненных форм, автор представляет эти подмногооб-...зия точками некоторого м. в соответствующем про-...тивном пространстве. Это м. и будет якобиевым, ...ичем в последующем наибольшее затруднение пред-...авляет доказательство того, что это м. неособен-...е.

В. В. Морозов

3374. Алгебраические поверхности с вырожденной канонической системой. Бюрниат (Surfaces algébriques à système canonique dégénéré. Burniat P o l.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 3, 247—261 (франц.)

Существование регулярных алгебраических поверх-...стей, каноническая система которых, кроме фикси-...ованной части, состоит из кривых жанра 2 пучка, ...ыло доказано в 1948 г. (Pompilj G., Rend. Accad. ...incei, 1948, **47**, 539—544) для нечетных значений гео-...етрического жанра p_g и для значений линейного ...анра $p_1 = 4p_g - 5$ и бижанра $p_2 = 5p_g - 5$.

На основе исследования семи простых моделей по-...ерхностей автор формулирует следующую теорему. ...ля всякого значения $p_g \geqslant 2$ существуют регулярные ...лгебраические поверхности, для которых канонические ...ривые состоят из фиксированной части жанра $p_g + 4 - i$ ... из $p_g - 1$ кривых жанра 2, принадлежащих линейному ...учку. Эти поверхности имеют линейный жанр, могу-...ий принимать любое значение $p^{(1)} = 4p_g + 1 - i$, ...бижанр $p_2 = 5p_g + 1 - i$, где $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

С. С. Бюшгенс

3375. О полярности относительно соприкасающихся квадрик поверхности. Аргириаде (Asupra polarității în raport cu cuadricele osculatoare ale unei suprafețe. Arghiriade Em.), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, **3**, № 5—6, 179—185 (рум.; резюме русс., франц.)

Соответствие Сегре сопоставляет каждой точке ка-...ательной плоскости к поверхности плоскость, прохо-...ящую через точку касания. Пучку плоскостей, про-...ходящих через прямую d, соответствует в касательной ...плоскости кривая третьего порядка — кривая Сегре C_3').

Если H_1' является гессианной кривой H_2' и имеет своей гессианной кривую C_3', а Γ_1' и Γ_2' суть кривые Кэли для H_1' и H_2', то кривая Γ_1' является огибающей поляр d' — полярно сопряженных прямой d относительно пучка соприкасающихся квадрик Гамбье, а кривая Γ_2' является огибающей поляр d' — полярно сопряженных прямой d относительно пучка соприкасающихся квадрик таких, что тройка касательных в начальной точке содержит две сопряженные прямые.

Н. М. Остиану

3376. Характеристическая функция Гильберта для степени идеала главного класса. Платнер (Die charakteristische Funktion von Hilbert für Potenzen von Hauptklassenidealen. Plattner P. Anton), Monatsh. Math., 1954, **58**, № 2, 103—113 (нем.)

Работа связана с исследованиями Гребнера (Gröbner W., Arch. Math., 1952, **3**, 351—359) по построению алгебраической геометрии на базе теории идеалов. Рассматриваются свойства гильбертовой характеристической функции однородного полиномиального идеала (H-идеала), выражающей число линейно независимых форм данной степени t, принадлежащих идеалу (и в то же время число условий, налагаемых на коэффициенты таких форм). Автор находит явное выражение функции Гильберта $H(t, \mathfrak{a}^\rho)$ для степени идеала $\mathfrak{a}$ главного класса (идеала, у которого число базисных форм совпадает с рангом) в предположении, что все формы базиса одной и той же степени τ. Для достаточно больших значений t функция $H(t, \mathfrak{a}^\rho)$ является полиномом от t степени d, равной размерности $\mathfrak{a}$. Коэффициенты этого полинома в свою очередь оказываются полиномами от ρ и τ. Находятся степени этих полиномов.

Введение к статье написано Гребнером.

А. Г. Школьник

3377. Псевдоабелевы многообразия. Рот (Pseudo-Abelian varieties. Roth L.), Proc. Cambridge Philos. Soc. 1954, **50**, № 3, 360—371 (англ.)

Абелевым многообразием (м.) W_p называется неприводимое м., координаты производящей точки которого выражаются абелевыми функциями рода p от p независимых переменных. Ранг r м. W_p есть число точек параллелоида периодичности U_p, соответствующих производящей точке W_p. При $r = 1$ W_p называется пикаровым м. W_p допускает транзитивную коммутативную группу ∞^p автоморфизмов, соответствующих трансляциям U_p. В работе рассматривается естественное обобщение этого типа м., называемое автором псевдоабелевым м. типа q, именно неособенное м. W_p, допускающее непрерывную коммутативную группу g ∞^q автоморфизмов ($i \leqslant q \leqslant p-1$).

В предположении достаточно общего характера этих м. (транзитивность g на всех V_q, отсутствие кратных точек в инволюциях i_d и т. д. — см. ниже) изучаются их свойства. Траектории g образуют конгруэнцию $\{V_q\}$ бирационально-эквивалентных пикаровых м. кроме того, W_p содержит вторую пикарову конгруэнцию $\{V_{p-q}\}$ ∞^q бирационально-эквивалентных м. V_{p-q} (таких конгруэнций может быть несколько, но каждое м., содержащее описанные конгруэнции V_q и V_{p-q}, псевдоабелева типа). V_{p-q} пересекают производящее V_q во множестве инволюций $i_d (d \geqslant 1)$. d называется детерминантом W_p. При этом W_p оказывается возможным отобразить на d-кратное м. $W_p^* = V_q^* \times V_{p-q}^*$ с

детерминантом 1; каждое V_q отображается на d-кратное V_q^* без точек ветвления. Наличие этого отображения позволяет установить сравнение для виртуальной канонической системы $|X_{p-1}|$ для W_p, а также для канонических систем $\{X_k\}$ $(k = 0, \ldots, p-2)$. Каждая такая система оказывается либо принадлежащей к конгруэнции $\{V_q\}$, либо имеет порядок нуль. Следовательно, все канонические инварианты W_p — нули, а инвариант Цейтена — Сегре $I = (-1)^{p-1} 2p$. Что касается арифметического жанра, то при $d = 1$ $P_a = (-1)^{p-1}$; при $d > 1$ та же формула вытекает из одного результата Тодда (Todd J. A., Proc. London Math. Soc., 1937, 43, 190) при дополнительном предположении о характере этого инварианта. Для случая, когда инволюция i_d циклическая, строится аналитическое представление W_p. В заключение указывается ряд возникающих здесь проблем. В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

3378. Дугорадиальное уравнение Сильвестра. Миллер (Ecuaţia arco- radială a lui Sylvester. Myller A.), Studii şi cercetări ştiinţ, 1953, 4, № 1—4, 19—28 (рум.; резюме русс., франц.)

На поверхности, заданной уравнением $r = r(\omega, \theta)$ в сферических координатах, полунатуральное «дугорадиальное уравнение Сильвестра» $s = f(r)$, где s — длина дуги линии, выделяет «дугорадиальную сеть», все линии которой могут быть получены изгибаниями одной и той же плоской кривой $s = f(r)$ с сохранением длин радиусов-векторов r. Часть этой сети, заключенная между двумя кривыми $r = \text{const}$, является сетью равных путей (réseau sans détours; см. Дубнов Я. С. Уч. зап. МГУ, 1946, 100, 212—216). Рассмотрены некоторые частные случаи. Например, на поверхности вращения с меридианом $\sqrt{1+k^2}\cdot s = f(r)$ дугорадиальная сеть $s = f(r)$ состоит из линий, образующих постоянные углы $\omega = \operatorname{arctg} k$ с меридианами. Имеются опечатки. Р. Н. Щербаков

3379. Об аксиоматическом обосновании внутренней геометрии поверхностей.Ринов (Über eine axiomatische Begründung der inneren Geometrie der Flächen. Rinow W.), Wiss. Z. Univ. Greifswald., 1953/1954, 3, № 1, 1—4 (нем.)

Рассматривается аксиоматическое обоснование внутренней геометрии двумерной проективной поверхности — двумерного точечного многообразия, на котором задано семейство путей — геодезических линий.

Так же как при аксиоматическом построении плоской проективной геометрии, рассматривается множество точек и прямых — геодезических линий, которые удовлетворяют аксиомам связи, порядка и непрерывности, по существу ничем не отличающимся от соответствующих аксиом для ограниченной области проективной плоскости. Далее, для введения специфической проективной структуры, вместо теоремы Дезарга постулируется следующее предложение:

Пусть на проективной поверхности четыре точки A, B, C, D пробегают четыре последовательности, которые сходятся к одной и той же точке O. Пусть при этом прямые AB, BC, CD, DA, AC стремятся соответственно к прямым a, b, c, d, e. Тогда последовательность прямых BD сходится к некоторой прямой f. Оказывается, что прямая f зависит только от прямых a, b, c, d, e и не зависит от способа предельного перехода.

Эта аксиома позволяет ввести двойное отношение в пучке геодезических, проходящих через O, и построить на поверхности проективную систему координат. В работе ставится ряд вопросов, намечающих дальнейшее построение аксиоматического обоснования проективной геометрии поверхости. М. А. Акивис

3380. О сферических кривых. Шерк (Intorno alle curve sferiche. Scherk Peter), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 1, 38—40 (итал.)

Даются простые доказательства некоторых известных теорем. Например, если для каждой кривой L поверхности F (при соответствующих условиях регулярности) линейный элемент ds^* места центров кривизны кривой L и линейный элемент $d\tilde{s}$ ее сферической индикатрисы бинормалей связаны равенством $ds^* = R d\tilde{s}$, $R = \text{const} > 0$, то поверхность F есть сфера радиуса R. При этом сферическая индикатриса бинормалей кривой L может быть получена проектированием места центров кривизны L из центра сферы F на концентричную единичную сферу. Для замкнутых сферических кривых доказываются равенства

$$\oint_{(L)} \frac{\tau}{\varkappa}\, ds = 0; \quad \oint_{(L)} \frac{\tau}{\varkappa^{2n+1}}\, ds = 0; \quad \oint_{(L)} \tau\, ds = 0,$$

где $\varkappa$ — кривизна и τ — кручение кривой, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Л. Л. Вербицкий

3381. К теории конгруэнций линий. Бюшгенс С. С., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 3, 381—384

Рассматриваются конгруэнции линий в трехмерном евклидовом пространстве и развивается способ, данный автором в статье «Геометрия векторного поля» (Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, 10, № 1, 73—96).

Конгруэнция линий определяется посредством двух однопараметрических семейств поверхностей, каждая линия конгруэнции является пересечением поверхностей разных семейств. Вообще, поверхности этих семейств, как бы их ни выбирали для данной конгруэнции, между собой не ортогональны.

Существуют, однако, биортогональные конгруэнции, для которых можно выбрать определенную пару однопараметрических семейств поверхностей так, что поверхности двух разных семейств будут всегда ортогональны. Для них векторы нормалей к этим поверхностям направлены по биссектрисам асимптотических линий поля орта J_3 касательных к линиям конгруэнции или, что то же, по направлениям линий кривизны 2-го рода этого поля. Характеристическое свойство биортогональной конгруэнции состоит в том, что для поля орта касательных к ее линиям одно семейство линий кривизны 2-го рода допускает ортогональное семейство поверхностей (тогда и второе семейство линий кривизны допускает ортогональное семейство поверхностей).

Если конгруэнция линий омбиликальная, т. е. нормальная кривизна поля орта касательных одинакова по всем ортогональным к J_3 направлениям, то через нее можно провести бесконечное множество пар ортогональных однопараметрических семейств поверхностей. Омбиликальная конгруэнция определяется произволом в две функции двух аргументов.

Если $\varphi = a$, $\psi = b$ — ортогональные семейства поверхностей, пересечением которых определена омбиликальная конгруэнция, то отношение величин градиентов функций φ, ψ постоянно вдоль каждой линии конгруэнции.

Если омбиликальная конгруэнция допускает семейство ей ортогональных поверхностей, то последние будут сферами (в частности, плоскостями). Обратно, ортогональные траектории любого семейства сфер образуют омбиликальную конгруэнцию.

Если омбиликальная конгруэнция будет прямолинейной, то она необходимо изотропная.

Н. Г. Туганов

3382. Изучение систем линий падения на поверхностях, подвергаемых движению. **В а л а** (Studium soustav spádových Čar na plochách podrobených pohybové transformaci. V a l a J o s e f), Sbor. Vysoké školy stavit. Brně, 1953, **2**, № 21, 47—58 (чеш.; резюме русс.)

Линиями падения поверхности Φ по отношению к плоскости ε называются ортогональные траектории сечений поверхности Φ плоскостями, параллельными плоскости ε. Находятся дифференциальные уравнения двупараметрического семейства линий падения поверхности по отношению к данной плоскости и трехпараметрического семейства линий падения поверхности по отношению ко всем поверхностям. Специально изучается двупараметрическое подсемейство последнего семейства, состоящее из всех линий падения, проходящих через регулярную точку A поверхности Φ, в частности находится поверхность Ψ, являющаяся геометрическим местом центров кривизны этих линий в точке A, и показывается, что всякая плоскость, проходящая через нормаль к поверхности Φ в точке A в неасимптотическом направлении, пересекает поверхность Ψ по окружности. Б. А. Розенфельд

3383. Об одном замечательном фокальном свойстве D-линий на конусе 2-го порядка. **В у н д е р л и х** (Eine bemerkenswerte Fokaleigenschaft der D-Kurven von Kegeln 2. Grades. W u n d e r l i c h W a l t e r), Monatsh. Math., 1954, **58**, № 1, 57—62 (нем.)

D-линиями поверхности (обобщение линий Дарбу) называют те линии поверхности, у которых соприкасающиеся сферы касаются поверхности. Доказывается следующая теорема: Каждая D-линия на конусе 2-го порядка пересекает под постоянным углом все плоскости каждого из шести фокальных пучков плоскостей конуса и, следовательно, является шестикратной локсодромой. Фокальными пучками плоскостей конуса 2-го порядка $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2 = 0$ называются пучки, оси которых являются прямыми пересечениями его изотропных касательных плоскостей с его плоскостями симметрии. Я. П. Бланк

3384. О потенциальных поверхностях. Ш т р у б е к к е р (Über Potentialflächen. S t r u b e c k e r K a r l), Arch. Math., 1954, **5**, № 1—3, 32—38 (нем.)

Рассматриваются интегральные поверхности уравнения потенциала $\Delta z = \partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 0$ в «изотропном» (полуевклидовом) 3-мерном пространстве, т. е. в пространстве, в котором расстояние ω между точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) выражается по формуле $\omega^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Так как средняя кривизна поверхности в таком пространстве имеет вид $H = \frac{1}{2}\Delta z$, то эти поверхности являются минимальными. Доказывается, что если такая поверхность содержит неизотропную прямую, то эта прямая является осью симметрии поверхности, а также ряд других теорем.

Б. А. Розенфельд

3385. Косое распределение образующих некоторых линейчатых поверхностей и их параметры распределения. **Г о р о в а р а** (Skowness of distribution of the generators of certain ruled surfaces and their parameters of distribution. G o r o w a r a K. K.), Istanbul Üniv. fen. fak. mec., 1953, **A18**, № 3, 223—230 (англ.; резюме турец.)

Статья посвящена изучению линейчатых поверхностей евклидова пространства с помощью дуальных векторов. Репер поверхности $A_1(t)$ определяется дуальными векторами $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, соответствующими взаимно ортогональным прямым: образующей A_1 данной поверхности S_1, нормали A_2 поверхности S_1 в центре образующей и «бинормали» A_3. Эти прямые образуют три взаимно ортогональные поверхности S_1, S_2, S_3. С поверхностью S_1 связывается линейчатая поверхность S_1^*, определяемая дуальным вектором $\mathbf{A}_1^* = \alpha\mathbf{A}_1 + \beta\mathbf{A}_2 + \gamma\mathbf{A}_3$ (α, β, γ — направляющие косинусы прямой A_1^*). Аналогично определяются поверхности S_2^* и S_3^*. Для случая $\alpha = \text{const}$, $\beta = 0$, $\gamma = \text{const}$ устанавливается: 1) линии сжатия поверхностей S_1 и S_1^* совпадают, 2) у поверхностей S_2 и S_2^* совпадают параметры распределения и косые распределения, т. е.

$$\frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2', \mathbf{a}_2'')}{(\mathbf{a}_2'^2)^{3/2}} = \frac{(\mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_2^{*\prime}, \mathbf{a}_2^{*\prime\prime})}{(\mathbf{a}_2^{*\prime 2})^{3/2}},$$

где $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_2^*$ — направляющие векторы образующих поверхностей S_2 и S_2^*, 3) если параметры распределения двух поверхностей из тройки S_1^*, S_2^*, S_3^* равны, то равны и у всех трех.

Даны условия, чтобы линии сжатия S_1^* были линиями откоса или кривыми Бертрана.

Имеются опечатки. В. И. Ведерников

3386. О поверхностях R_0. **М а р к у с** (Asupra unor suprafețe R_0. M a r c u s F.), Studii și cercetări mat., 1953, **4**, № 3—4, 437—452 (рум.; резюме русс., франц.)

Пусть S_x — поверхность в проективном пространстве, описанная точкой x и отнесенная к параметрам u, v асимптотических линий; x_1 и x_{-1} — точки пересечения асимптотических касательных соответственно к линиям v и u поверхности S_x с какой-нибудь прямой второго канонического пучка; S_{x_1}, $S_{x_{-1}}$ — поверхности, описанные точками x_1 и x_{-1}. Отыскиваются такие S_x, асимптотические линии которых соответствуют асимптотическим линиям S_{x_1} или $S_{x_{-1}}$. В частности, если это имеет место для S_{x_1}, то при подходящей параметризации будут справедливы равенства

$$\gamma_1 = \gamma = 1,\ \theta_{1u} = \theta_u,\ \theta_{1v} = \theta_v,$$

$$\beta_1 = \beta + (1 + 4\lambda)\,\partial^2 \ln \beta/\partial u\,\partial v,$$

где α, β — коэффициенты канонического разложения Фубини для поверхности S_x:

$$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x,\ x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x$$

$$(\theta = \ln \beta\gamma),$$

а γ_1, β_1 — коэффициенты аналогичного разложения для S_{x_1}.

Если $1 + 4\lambda = 0$, то x_1 и x_{-1} принадлежат второму ребру Грина, а поверхности S_{x_1} и $S_{x_{-1}}$ проективно наложимы на S_x. В этом случае поверхность S_x порождает целую бесконечную последовательность проективно наложимых друг на друга поверхностей S_{x_i} и $S_{x_{-i}}$ с соответствующими друг другу асимптотическими, причем каждая из поверхностей S_{x_i} ($S_{x_{-i}}$) образуется из предыдущей поверхности $S_{x_{i-1}}$ ($S_{x_{-i+1}}$) последовательности по тому же закону (т. е. с той же асимптотической и с той же канонической прямой), по которому поверхность S_{x_1} ($S_{x_{-1}}$) образуется из поверхности S_x. Поверхности S_{xi} ($S_{x_{-i}}$) обладают тем свойством, что у них каждая точка x_{i+1} (x_{-i-1}) лежит на касательной $v = \text{const}$ ($u = \text{const}$) поверхности $S_{x_{i-1}}$ ($S_{x_{-i+1}}$).

Определяются в явном виде значения γ, β, p_{11}, p_{22} для поверхностей S_x, обладающих указанным свойством. Класс таких S_x зависит от четырех произвольных постоянных.

Если $1+4\lambda\neq 0$, то при соответствии асимптотических для проективной наложимости поверхностей S_x и S_{x_i} требуется равенство $\partial^2 \ln\beta/\partial u\,\partial v=0$, что вместе с известными условиями существования дает, в частности, равенства

$$2(1+2\lambda)\beta_{vv}=\beta_u,\quad \beta_u\beta_v=0.$$

Возможны случаи:

1. $\beta_u=0$, $\beta_v\neq 0$, $1+2\lambda\neq 0$. В этом случае поверхность S_x (широта класса — 4 параметра для каждой канонической прямой) также порождает бесконечную последовательность проективно наложимых друг на друга поверхностей S_{x_i} и $S_{x_{-i}}$ уже для произвольной канонической прямой (в том числе и для ребра Грина).

2. $\beta_u=0$, $1+2\lambda=0$. Этот случай соответствует директрисе Вильчинского. Класс S_x также зависит от четырех параметров. Имеется бесконечная последовательность наложимых друг на друга поверхностей S_{x_i} и $S_{x_{-i}}$.

3. $\beta_v=0$. В этом случае $\gamma=1$, $\beta=c$, $p_{11}=h$, $p_{22}=k$ (c, h, $k=\text{const}$). Все поверхности S_{x_i} и $S_{x_{-i}}$ — проективно эквивалентны друг другу. Это — поверхности совпадения. Наоборот, если поверхности совпадения (γ, $\beta=\text{const}$) проективно эквивалентны поверхностям, описанным точками x_1, x_{-1}, расположенными на асимптотических касательных, то $p_{ii}=\text{const}$. Поверхность совпадения при $p_{ii}=\text{const}$ есть проективно минимальная поверхность. Наоборот, если поверхность совпадения проективно минимальна, то $p_{ii}=\text{const}$.

Н. И. Кованцов

3387. О системах изотермически сопряженных линий на поверхности. Маркус (Asupra sistemelor de linii isoterm conjugate pe o suprafață. Marcus F.), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, **3**, № 5—6, 175—178 (рум., резюме русс., франц.)

Сопряженная система линий u, v называется изотермически сопряженной, если коэффициенты второй квадратичной формы при отнесении поверхности к этой системе удовлетворяют соотношениям $D'=0$, $D=\pm D''$.

Если поверхность отнесена к изотермически сопряженным системам линий, коэффициенты второй квадратичной формы и инварианты уравнений Лапласа поверхности k, h и ее сферического изображения $\bar{k}$, $\bar{h}$ связаны соотношением

$$\frac{\partial^2 \log D:D''}{\partial u\,\partial v}=\bar{k}-\bar{h}+k-h. \qquad (1)$$

Отсюда при соответствующем выборе параметров получаем

$$\bar{k}-\bar{h}+k-h=0, \qquad (2)$$

откуда следует теорема: Сеть сопряженных линий будет изотермически сопряженной тогда и только тогда, когда инварианты уравнений Лапласа, которым удовлетворяют координаты образующей точки и направляющие косинусы нормали к поверхности, связаны соотношением (2).

Н. М. Остиану

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

3388. Векторные диады и их приложения. Манарини (Diadi vettoriali ed applicazioni. Manarini Mario), Atti IV congr. Unione mat. ital, 1953, **2**, 526—529 (итал.)

Векторной диадой $\overline{H}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ автор называет линейный векторный оператор, который, действуя на переменный вектор $\mathbf{u}$, дает вектор $\overline{H}(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{u}=(\mathbf{a}\times\mathbf{u})\times\mathbf{b}\equiv\mathbf{u}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{a}\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{b})$. Методическую целесообразность введения этого оператора автор усматривает, в частности, в том, что момент инерции относительно оси, проходящей через точку O и имеющей направление единичного вектора $\mathbf{a}$, системы материальных точек m_i, $M_i(i=1,2,\ldots,N)$ равен $\mathbf{a}\sum_{i=1}^{N} m_i\overline{H}(\overline{OM_i},\overline{OM_i})\,\mathbf{a}$.

А. М. Лопшиц

3389. Некоторые теоремы о геометрических объектах и их приложения. Яно, Тасиро (Some theorems on geometrie objects and their applications. Yano Kentaro, Tashiro Yoshihiro), Nieuw arch. wiskunde, 1954, **2**, № 2—3, 134—142 (англ.)

Пусть в n-мерном пространстве действует r-параметрическая группа G_r с инфинитезимальными операторами X_a ($a,b,c=1,2,\ldots,r$), определяющими векторми ξ^i_a ($i=1,2,\ldots,n$) ранга q с матрицей $\|\xi^i_a\|$ и структурными константами C^a_{bc}. Говорят, что r однородно-линейных геометрических объектов Φ^A_a ($A=1,2,\ldots,N$) образуют относительно G_r полную систему, если

$$X_b\Phi^A_c-X_c\Phi^A_b=C^a_{bc}\Phi^A_a.$$

В работе рассматривается вопрос об интегрируемости системы $X_a\Omega^A=\Phi^A_a$ относительно объекта Ω^A в предположении, что Φ^A_a образуют относительно G_r полную систему. В случае $q=r\leqslant n$ эта система оказывается вполне интегрируемой, в других случаях полная интегрируемость получается при наложении некоторых конечных соотношений на Ω^A. Полученные результаты применены для доказательства двух следующих теорем: 1. Если $q=r\leqslant n$ и $X_a\Omega^A=\rho_a\Omega^A$, где Ω^A — однородно-линейный объект, а ρ_a — скаляры, то существует такой скаляр ρ, что G_r будет инвариантной группой объекта $\rho\Omega^A$, т. е. что $X_a(\rho\Omega^A)=0$. 2. Если $q=r\leqslant n$ и $X_a\Omega^A=\Phi^A_a$, где Φ^A_a суть r однородно-линейных объектов, то существует такой однородно-линейный объект Φ^A, что G_r будет инвариантной группой объекта $\Omega^A+\Phi^A$.

Из этих теорем в качестве следствий получены некоторые теоремы Кнебельмана (Knebelman M. S., Ann. Math., 1928, **20**, 389—394) и обобщение одной теоремы Левина (Levine J., Bull. Amer. Math. Soc., 1936, **42**, 418—423).

Библиография, 9 названий.

П. И. Швейкин

3390. Об обращении теоремы Вольтерра-Пуанкаре для форм с непрерывными коэффициентами. Папи (Sur la réciproque du théorème de Volterra — Poincaré pous les formes a coefficients continus. Papy Georges), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, сер. 5, № 1, 25—28 (франц.)

Понятие внешнего дифференциала внешней дифференциальной формы ω_p степени p распространяется на формы с непрерывными коэффициентами в случае, если находится форма ω_{p+1} степени $p+1$ такая, что $\int_{\partial C^{p+1}}\omega_p=\int_{C^{p+1}}\omega_{p+1}$, где C^{p+1} — произвольная область, а ∂C^{p+1} — ее граница; в этом случае полагают, что ω_{p+1} — внешний дифференциал формы ω_p в обобщенном смысле.

Автор рассматривает представление оператора внешнего дифференцирования в виде суммы операторов $= BAB^{-1}$, где операторы A, B определяются так:

$$(a_{i_1 \dots i_p}[dx^{i_1} \dots dx^{i_p}] = \frac{\partial^p a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_p}} [dx^{i_1} \dots dx^{i_p}];$$

при этом применение оператора B предполагает существование и равенство всех производных $\frac{\partial^p a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_p}}$, где $(j_1 \dots j_p)$ — перестановки индексов $(i_1 \dots i_p)$.

Рассмотрение некоторых свойств операторов A и B позволяет сделать вывод, что всякая форма, имеющая области, гомеоморфной сфере, обобщенный внешний дифференциал, равный нулю, является внешним дифференциалом другой формы в классическом смысле.

В. В. Рыжков

3391. **Прямые Шефли, проведенные через вершины симплекса в линейном n-мерном пространстве.** Било (On Schäfli sets of lines issued from the vertices of a simplex in a linear space of n dimensions. Bilo J.), Simon Stevin, 1954, 30, № 1, 1—4 (англ.)

$(n+1)$ прямых n-мерного линейного пространства образуют совокупность Шефли, если любое пространство $(n-2)$ измерений, пересекающее n из этих линий, пересекает и оставшуюся прямую.

В работе доказываются две теоремы. 1. Пусть прямые Шефли проведены через вершины симплекса. Гиперплоскости, проходящие через $(n-2)$-мерную грань симплекса и каждую прямую совокупности, проходящую через вершину симплекса, принадлежащую этой грани,— пересекают противоположное ребро в $(n-1)$ точках. Совокупность этих точек на всех ребрах (т. е. $^1/_2 n\,(n+1)\,(n-1)$ точек) в нечетномерных пространствах лежит на гиперповерхности $(n-1)$ порядка. В четномерных пространствах на такой гиперповерхности лежат точки, гармонически сопряженные с указанными, относительно вершин, принадлежащих ребру.

2. $\frac{1}{2} n\,(n+1)\,(n-1)$ гиперплоскостей теоремы 1 касаются гиперповерхности класса $(n-1)$.

В трехмерном пространстве эти теоремы доказаны Куртом (Court N. A., Duke Math. J., 1948, 15, 49—54).

А. М. Нахимовская

3392. **Расслоение k-параметрических семейств $(k-1)$-мерных плоскостей.** Гейдельман Р. М., Матем. сб., 1954, 34(76), № 3, 499—524

Работа распространяет на n-мерное пространство задачу расслоения пары конгруэнций в P_3.

В главе I рассматривается пара двупараметрических семейств прямых (l_1), (l_2) в проективном P_n. Если они образуют двустороннее расслояемую пару, то обе конгруэнции принадлежат одному P_3, погруженному в P_n. Если конгруэнция (l_1) расслояет конгруэнцию (l_2) (касательные плоскости расслояющих поверхностей в точках пересечения с лучом l_1 проходят через луч l_2), то расслояющие поверхности обладают сопряженной сетью, соответствующей развертывающимся поверхностям обеих конгруэнций, которые таким образом соответствуют друг другу, а фокусы конгруэнции (l_2) лежат в фокальных плоскостях (l_1). Аналогично рассматривается вопрос о расслоении параболической конгруэнции.

В главе II рассматривается пара k-параметрических семейств $(k-1)$-мерных плоскостей (L_1), (L_2). Семейство (L_1) расслояет семейство (L_2), если существует такое $(k-1)$-параметрическое семейство k-мерных поверхностей (Σ_1) таких, что каждая поверхность Σ_1 пересекается каждой плоскостью L_1 в одной точке и касательная k-мерная плоскость к поверхности Σ_1 в этой точке проходит через соответствующую плоскость (L_2). Расслояющее семейство существует с произволом $k(k-1)$ функций двух аргументов и имеет специальную структуру, т. е. не может быть произвольным.

Расслояемое семейство (L_2) при заданном (L_1) существует с произволом k^2 функций одного аргумента. Фокусы (L_2) лежат в соответствующих фокальных плоскостях (L_1), а фокальные $(k-1)$-параметрические подсемейства (L_1) и (L_2) соответствуют. Если семейства (L_1) и (L_2) двусторонне расслояемы, то они оба принадлежат одному $(2k-1)$-мерному пространству. Такая пара существует с произволом $2k^2-k$ функций одного аргумента. Асимптотические линии на всех $2k$ фокальных поверхностях семейств (L_1) и (L_2) соответствуют друг другу.

В. И. Коровин

3393. **О дифференциально-геометрическом методе в теории аналитических пучков.** Кодаира (On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks. Kodaira K.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 12, 1268—1273 (англ.)

Используется терминология и обозначения предыдущих работ автора (РЖМат, 1954, 3272—3274). Пусть V — компактное келерово многообразие комплексной размерности n и F — пучок комплексных линий над V (аналитическое косое произведение над V, слоем которого является поле C комплексных чисел, а группой — мультипликативная группа комплексных чисел, действующая на C; все такие пучки образуют аддитивную группу). Пусть далее $\Omega^p(F)$ — пучок над V источников (germs) голоморфных (внешних дифференциальных) p-форм с коэффициентами в F, $H^q(V, \Omega^p(F))$ — q-мерная группа верхних гомологий с коэффициентами в $\Omega^p(F)$. Как показано автором ранее, она изоморфна группе $H^{p,q}(F)$ гармонических форм над V типа (p, q) с коэффициентами в F (РЖМат, 1954, 3272). Устанавливаются некоторые достаточные условия равенства нулю этой группы.

Пусть $\gamma = \frac{i}{2\pi} \sum X_{\alpha\beta^*}\, dz^\alpha\, d\bar{z}^\beta$ — произвольная действительная ($\bar{X}_{\alpha\beta^*} = X_{\beta\alpha^*}$) форма типа (1,1). Обозначим через $R^\sigma_{\tau\alpha^*\beta}$ тензор кривизны, $R_{\alpha^*\beta} = R^\tau_{\tau\alpha^*\beta}$ тензор Риччи. С формой γ связывается эрмитова форма:

$$\theta^{p,q}(\gamma, u, z) =$$

$$= \sum (\delta^\sigma_\tau [X^{\beta^*}_{\alpha^*} - R^{\beta^*}_{\alpha^*}] + pR^\sigma_{\tau\alpha^*}{}^{\beta^*})\, u_{\sigma\tau_2\dots\tau_p\beta^*\alpha^*_2\dots\alpha^*_q} \times$$

$$\times \bar{u}^{\tau\tau_2\dots\tau_p\alpha^*\alpha^*_2\dots\alpha^*_q},$$

где $u_{\tau_1\dots\tau_p\alpha^*_1\dots\alpha^*_q}$ — кососимметрический тензор в каждой точке z из V, поднимание индексов осуществляется с помощью метрического тензора $g^{\alpha\beta^*}$. Доказывается следующая теорема:

Если характеристический класс $c(F)$ пучка F (РЖМат, 1954, 3273) содержит действительную замкнутую форму γ типа (1,1) такую, что $\theta^{p,q}(\gamma, u, z)$ положительно определена в любой точке z из V, то группы $H^q(V, \Omega^p(F))$, и $H^{n-q}(V, \Omega^{n-p}(-F))$ обе равны нулю для $1 \leqslant q \leqslant n$.

В частности, для обращения в нуль групп $H^q(V, \Omega^n(F))$ и $H^{n-q}(V, \Omega^0(-F))$ при $1 \leqslant q \leqslant n$ достаточно, чтобы форма γ была положительной ($\gamma > 0$) в том смысле, что соответствующая ей эрмитова форма $\frac{1}{2\pi} \sum X_{\alpha\beta^*} \bar{u}^\alpha u^\beta$ положительно определена в любой

точке. Для равенства нулю группы $H^q(V, \Omega^0(F))$ при $1 \leqslant q \leqslant n$ достаточно, чтобы такая форма $\gamma > 0$ принадлежала $c(F) + c_1$, где c_1 — первый класс Черна многообразия V. И. З. Розенкноп

3394. Линии Дарбу риманова пространства. Прванович (Lignes de Darboux dans l'espace riemannien. Prvanovitch Mileva), Bull. sci. math., 1954, 78, сер. 2, 9—14 (франц.)

Линией Дарбу поверхности в E_3 называется такая линия, соприкасающаяся сфера которой касается поверхности.

Линией Дарбу риманова пространства V_n, если оно вложено в риманово пространство V_m, автор называет линию, обладающую в каждой точке свойством:

$$a_{\alpha\beta}\frac{\delta q^\alpha}{\delta s}N^\beta_\tau = 0 \ (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m; \tau = n+1, \ldots, m), \quad (1)$$

где q^α — контравариантные компоненты вектора кривизны кривой, N^β_τ — контравариантные компоненты системы $(m-n)$ ортогональных и единичных векторов пространства V_m, нормальных к подпространству V_n в в каждой его точке, $a_{\alpha\beta}$ — метрический тензор пространства V_m и оператор $\frac{\delta}{\delta s}$ означает абсолютное дифференцирование по дуге s рассматриваемой кривой.

Это определение линий Дарбу содержит в себе геометрическое определение линий Дарбу, данное автором специально для пространства V_n, вложенного в евклидово пространство E_m.

Определяющие соотношения (1) преобразованы в дифференциальные уравнения линий Дарбу.

Л. Е. Евтушик

3395. Классификация трехмерных римановых пространств по группам движений. Кручкович Г. И., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 1, 3—40

Дается классификация трехмерных римановых пространств V_3 (собственно римановых и псевдоримановых) непостоянной кривизны по группам движений G_r.

Классификация собственно римановых трехмерных пространств была дана Л. Бианки (Bianchi L., Lezioni sulla teoria nei gruppi, Pisa, 1918).

Здесь, как и у Бианки, классификация строится на рассмотрении возможных групп преобразований в V_3, реализующих известные типы структур групп Ли G_r $(r = 2, 3, 4)$.

Определение линейного элемента пространства V_3 и его группы движений сводится к интегрированию уравнений Киллинга.

Получено пять типов пространств V_3, обладающих двухчленными группами движений, четыре типа пространств V_3, обладающих трехчленными интранзитивными группами движений, семь типов пространств V_3, допускающих трехчленные разрешимые транзитивные группы движений, и восемь типов пространств V_3 с четырехчленными группами движений (в случае неразрешимых групп движений G_3 в общем виде решения уравнений Киллинга указаны Бианки, см. Soc. Ital. sci. Mem. mat., 1897, **11**, сер. 3).

В частности, если группа движений G_4 является разрешимой, то метрика пространств V_3 и операторы групп движений имеют (в некоторой специально выбранной системе координат) следующий вид:

$$ds^2 = k(dx^1)^2 + 2(2-c)\,e^{cx^1}dx^1\,dx^2 + e^{2x^1}(dx^3)^2,$$

$$X_1 = p_2,\ X_2 = p_3,\ X_3 = x^3p_2 + e^{(c-2)x^1}p_3,$$

$$X_4 = -p_1 + cx^2p_2 + x^3p_3,$$

где k, c — любые постоянные, причем $c \neq 2$,

$$ds^2 = k(dx^1)^2 + e^{2x^1}(2dx^1\,dx^2 - (dx^3)^2),$$

$$X_1 = p_2,\ X_2 = p_3,\ X_3 = x^3p_2 + x^1p_3,$$

$$X_4 = -p_1 + 2x^2p_2 + x^3p_3,$$

где k — постоянная,

$$ds^2 = k(dx^1)^2 + 2dx^1\,dx^2 - \cos^2 x^1\,(dx^3)^2,$$

$$X_1 = p_2,\ X_2 = p_3,\ X_3 = x^3p_2 + \operatorname{tg} x^1p_3,$$

$$X_4 = p_1 + \frac{(x^3)^2}{2}p_2 + x^3\operatorname{tg} x^1\,p_3,$$

где k — постоянная,

$$ds^2 = e_1(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + 2x^1\,dx^2\,dx^3 + [(x^1)^2 + e_3](dx$$

$$X_1 = p_2,\ X_2 = p_3,\ X_3 = -p_1 + x^3\,p_2,$$

$$X_4 = e_1e_3x^3p_1 + {}^1/_2[(x^1)^2 - e_1e_3(x^3)^2]\,p_2 - x^1\,p_3,$$

где $e_1, e_3 = \pm 1$.

Имеются опечатки и неточности; в классификации встречаются несущественно различные типы пространств; несущественен функциональный произвол в определении интранзитивных групп движений G_3 с изотропными поверхностями интранзитивности.

Упущена совокупность пространств V_3 (зависящая от одной произвольной постоянной a) с линейным элементом

$$ds^2 = (e^{-2a\arctg x^1}/1 + (x^1)^2)\,[2dx^1\,dx^3 - (dx^3)^2],$$

обладающая разрешимой четырехчленной группой движений, определенной операторами

$$X_1 = p_2,\ X_2 = p_3,\ X_3 = x^3p_2 + x^1\,p_3,$$

$$X_4 = [1 + (x^1)^2]\,p_1 + \left(2x^2a + \frac{(x^3)^2}{2}\right)p_2 + x^3(x^1 + a)\,p$$

Упущены случаи вещественных форм разрешимой группы Ли G_4, обладающей в комплексной области структурой

$$[X_1X_2] = 0,\ [X_1X_3] = 0,\ [X_2X_3] = X_1$$

$$[X_1X_4] = cX_1,\ [X_2X_4] = X_2,\ [X_3X_4] = (c-1)X_3,$$

где c — любое число. И. П. Егор

3396. Определение пространств A_3, допускающих вращение. Думитраш (Determinarea spaţiilor A_3 care admit o rotaţie în fiecare punct. Dumitraş V.), Studii şi cercetări mat., 1953, **4**, № 1—213—232 (рум.; резюме русс., франц.)

Определяется аффинное пространство A_3 с коэффициентами связности γ^k_{ij}, допускающее вращение. Обозначая риманов тензор пространства через γ^a_{bcd}, будем иметь для двух тензоров кривизны: $\gamma^a_{bad} = \gamma_{bd}$, $\gamma^a_{acd} = r_{cd}$ (по a суммирование). Если эти тензоры не вырождаются, их можно привести к канонической форме:

$$r_{12} = M,\ r_{23} = r_{31} = 0,\ \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 1,$$

$$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} = 0 \ (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j).$$

Конгруэнтные преобразования, сохраняющие эту каноническую форму, имеют вид:

$$d\bar{s}^1 = \cos\theta\cdot ds^1 - \sin\theta\cdot ds^2,\ d\bar{s}^2 = \sin\theta\cdot ds^1 + \cos\theta\cdot ds^2,$$

$$d\bar{s}^3 = ds^3,$$

т. е. в этом случае группа преобразований допускает вращение в каждой точке.

Предполагая, что соотношения, определяющие пространство в конечном виде, содержат θ и θ_0 есть частное решение этих соотношений, автор подходящим вращением приводит θ_0 к нулю и присоединяет таки

образом к пространству три инвариантные формы: ds^1, ds^2, ds^3. В этом случае нахождение инвариантов пространства сводится к «специальной проблеме эквивалентности» Э. Картана; эти инварианты суть коэффициенты w^a_{bc} разложения билинейных ковариантов Δs^1, Δs^2, Δs^3 по формам базиса и производные этих коэффициентов по s^i ($i = 1, 2, 3$). Пространство A_3 допускает вращение (1), если все конечные соотношения удовлетворяются тождественно.

Ставится задача: найти пространство A_3, допускающее вращение, т. е. группу преобразований (1); на коэффициенты связности этого простанства получаются следующие соотношения:

$$\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = a, \quad \gamma^2_{31} = -\gamma^1_{32} = \alpha,$$
$$\gamma^3_{11} = \gamma^3_{22} = b, \quad \gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = \beta,$$
$$\gamma^2_{11} = \gamma^1_{21} = m, \quad \gamma^2_{12} = -\gamma^1_{22} = n,$$
$$\gamma^1_{13} = \gamma^2_{23} = p, \qquad (2)$$
$$\gamma^1_{33} = \gamma^2_{33} = \gamma^3_{13} = \gamma^3_{23} = \gamma^3_{31} = \gamma^3_{32} = \gamma^1_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^2_{21} =$$
$$= \gamma^2_{22} = \gamma^1_{23} = \gamma^2_{13} = 0.$$

Отсюда теорема: Если пространство A_3 допускает группу преобразований (1), то можно выбрать систему координат таким образом, чтобы получить формулы (2), где a, α, b, β, p и γ^3_{33} — абсолютные инварианты, а функция θ есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\theta}{\partial s^1} = \bar{m}\cos\theta + \bar{n}\sin\theta - m,$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial s^2} = -\bar{m}\sin\theta + \bar{n}\cos\theta - n, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial s^3} = 0. \qquad (3)$$

Из условий интегрируемости этой системы следует, что выражение $A = \partial n/\partial s^1 - \partial m/\partial s^2 - m^2 - n^2$ также является абсолютным инвариантом и функции m и n удовлетворяют уравнениям

$$\partial m/\partial s^3 = (p - a)\,m - \alpha n, \qquad \partial n/\partial s^3 = (p - a)\,n + \alpha m.$$

Для абсолютного инварианта I получается уравнение $\beta\,\partial I/\partial s^3 = 0$.

Если $\beta \neq 0$, то все инварианты суть константы.

Если при этом абсолютный инвариант $A = 0$, то вращение будет $\theta = \text{const}$. Отсюда теорема: Пространство A_3, коэффициенты связности которого равны 0, кроме постоянных $\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = a$, $\gamma^2_{31} = -\gamma^1_{32} = \alpha$, $\gamma^3_{11} = \gamma^3_{22} = b$, $\gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = \beta$, $\gamma^1_{13} = \gamma^2_{23} = p$, γ^3_{33} допускает вращение во всех точках.

Если же $A \neq 0$, то автор приходит к системе уравнений $ds^1 = \lambda dx^1$, $ds^2 = \mu dx^2$, $ds^3 = dx^3 + \rho dx^1$, где λ, μ и ρ — функции от γ^1, γ^3, связанные уравнениями. $\lambda\mu\,(\mu\mu_{(x^1)^2} + \lambda\lambda_{(x^2)^2}) - \lambda^2\lambda_{x^2}\mu_{x^2} - \mu^2\lambda_{x^1}\mu_{x^1} + A\lambda^2\mu^3 = 0$,

$$\frac{\partial\rho}{\partial s^2} = 2\beta\lambda\mu$$

($A = \text{const}$). Пространство A_3 допускает вращения, определенные (3), если все коэффициенты связности равны нулю, кроме $\gamma^2_{11} = -\gamma^1_{21} = \frac{\lambda_{x^3}}{\lambda\mu}$, $\gamma^2_{12} = -\gamma^1_{22} = \frac{\mu_{x^1}}{\lambda\mu}$ и постоянных $\gamma^1_{31} = \gamma^2_{32} = \gamma^1_{13} = \gamma^2_{23} = a$, $\gamma^3_{12} = -\gamma^3_{21} = \beta$, $\gamma^3_{21} = \gamma^3_{22} = b$, γ^3_{33}.

В случае $\beta = 0$ автор показывает существование пространств A_3, коэффициенты связности которых зависят от произвольных функций. Н. Г. Гаспарян

3397. Геометрия обобщенных биаксиальных пространств. Широков А. П., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, 114, № 2, 123—166

Бипланарное пространство B_{2n-1} характеризуется фундаментальной группой, которая изоморфна подгруппе проективных преобразований, переводящих в себя две непересекающиеся абсолютные плоскости P_{n-1}. Пространство B_{2n-1} называется гиперболическим, если эти плоскости действительны, и эллиптическим, если они мнимы. Эта геометрия является обобщением биаксиальной геометрии эллиптического типа (Норден А. П., Матем. сб., 1949, 24(66), № 3). Особыми называются прямые, пересекающие обе абсолютные P_{n-1} и плоскости, являющиеся местами особых прямых.

Если определять точку B_{2n-1} псевдовектором $2n$-мерного векторного пространства, то абсолютные P_{n-1} определятся заданием двух псевдо n-векторов или одного аффинора g^β_α особого типа, удовлетворяющего в эллиптическом случае уравнению

$$g^\beta_\alpha g^\gamma_\beta = -\delta^\gamma_\alpha$$

и определяющего на всякой особой прямой абсолютную инволюцию с двойными точками на абсолютных P_{n-1}.

Симметрический тензор $a_{\alpha\beta}$ называется b-тензором, если тензор $b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} g^\gamma_\beta$ симметричен, и s-тензором, если $b_{\alpha\beta}$ кососимметричен. Эти тензоры определяют в B_{2n-1} гиперквадрики — соответственно бицилиндры или сфероиды.

Пространством A_{2n} называется пространство аффинной связности без кручения, допускающее существование двух полей абсолютно параллельных, простых и взаимно простых n-векторов, которые определяют абсолютные P_{n-1} в пространствах направлений, исходящих из точек A_{2n}. Тензор абсолютной инволюции этих пространств удовлетворяет уравнению $\nabla_\gamma g^\beta_\alpha = 0$. В A_{2n} с локальными B_{2n-1} эллиптического типа можно установить голономную систему канонических координат, в которой матрица тензора g^β_α имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix},$$

где E_n — единичная матрица. Составляя комбинации канонических координат

$$x^{k'} = x^k + ix^{n+k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

можно отобразить A_{2n} на комплексное пространство B_n. Преобразование канонических координат соответствует аналитическому преобразованию координат в B_n. Поверхности X_{2k}, огибающие семейство особых плоскостей в A_{2n}, соответствуют аналитическим поверхностям X_k в B_n. Параллельному перенесению в A_{2n} соответствует общее эрмитово перенесение в B_n.

Если связность A_{2n} допускает ковариантно-постоянный b-тензор, то ему соответствует в B_n ковариантно-постоянный симметрический тензор; ковариантно-постоянному s-тензору соответствует в B_n ковариантно-постоянный эрмитов тензор. Если этот s-тензор не вырождается, то A_{2n} совпадает с A-пространством

(Широков П. А., Изв. Казанск. Ф. М. О., 1925, 25, сер. 2, 105).

Рассматриваются частные случаи связности:

1. K-связность, характеризующаяся условием на тензор кривизны

$$R^{\tau}_{\alpha\beta\sigma}g^{\sigma}_{\tau}=0.$$

2. Аналитическая связность, которой в B_n соответствуют коэффициенты ε^k_{ij}, являющиеся аналитическими функциями комплексных координат, соответствующих каноническим. Ее признак:

$$R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma.}+g^{\sigma}_{\alpha}g^{\lambda}_{\tau}R^{\tau}_{\sigma\beta\gamma.}=0.$$

Чтобы аналитическая связность была K-связностью, необходимо и достаточно, чтобы она была эквиаффинной.

3. Π-связность характеризуется такой канонической системой координат, которой в B_n соответствуют коэффициенты связности вида

$$\varepsilon^k_{ij}=\delta^k_i p_j+\delta^k_j p_i\ .$$

Аналитической Π-связности соответствует в B_n проективно-евклидова связность. $K\Pi$-связность является одновременно и K- и Π-связностью.

Гиперповерхность X_{2n} пространства E_{2n+1} нормализуется особой прямой, проходящей через ее точку, и особой плоскостью P_{2n-1}, лежащей в касательной гиперплоскости. Гиперповерхность определяется при $n>1$ вообще своей внутренней связностью (аналитической $K\Pi$-связностью). При понижении ранга тензора асимптотических направлений X_{2n} требуется, кроме того, задание этого тензора, удовлетворяющего условиям интегрируемости.

Геометрия линейных комплексов пространства Лобачевского совпадает с геометрией подгруппы преобразований пространства E_5, переводящих в себя некоторый бицилиндр. А. П. Норден

3398. О траекториях динамической системы в пространстве Финслера или в обобщенном вариационном пространстве. К л е й н (Sur les trajectoires d'un système dynamique dans un espace finslérien ou variationnel généralisé. K l e i n J o s e p h), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 22, 2144—2146 (франц.)

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}-\frac{\partial L}{\partial x^i}=Q_i\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

при переходе к новому переменному u преобразуются в уравнения

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}}=\Xi_{\alpha}\quad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1),\qquad (1)$$

где $\mathcal{L}=L\left(x^{\alpha},\ \frac{\dot{x}^{\alpha}}{\dot{x}^{n+1}}\right)\dot{x}^{n+1}$, $\Xi_i=Q_i\,\dot{x}^{n+1}$,

$\Xi_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}Q_i\,\dot{x}^i$, $\dot{x}^{\alpha}=dx^{\alpha}/du$, $x^{n+1}=t$.

Если ввести кососимметричный тензор

$$S_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\beta}}\Xi_{\alpha}-\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\Xi_{\beta}\right)$$

(«тензор обобщенных сил»), то уравнения (1) будут являться ассоциированными для внешней квадратичной формы

$$\Omega=\left[d\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}},\ dx^{\alpha}\right]+\frac{1}{2}\left[S_{\alpha\beta}dx^{\alpha},\ dx^{\beta}\right]\qquad (2)$$

суммирование по $\alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ n+1$).

При $Q_i=0$ уравнения (1) совпадают с уравнениями геодезических линий пространства Финслера, определяемого метрикой $ds=\mathcal{L}(x^{\alpha},\ dx^{\alpha})$. Ставится вопрос о представлении уравнений (1) в общем случае в виде

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}}=K\frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^{\alpha}}-\omega\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\qquad (3)$$

(«обобщенные вариационные уравнения»). Утверждается, что это можно сделать тогда и только тогда, если выполнены условия

$$(S_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta}+S_{\alpha\gamma}S_{\delta\beta}+S_{\alpha\delta}S_{\beta\gamma})\,\dot{x}^{\alpha}=0.\qquad (4)$$

Приводятся два примера выполнимости условиия (4):

1) $Q_i=\frac{\partial}{\partial x'^i}U(x^{\beta},\ x'^k)$; $K=\dot{x}^{n+1}$, $\omega=U\dot{x}^{n+1}$;

2) $Q_i=R_i(x^k,\ t)+\sum_{j=1}^{n}S_{ij}(x^k,\ t)\,x'^j$,

$S_{ij}=-S_{ji}$; $S_{\alpha\beta}=\lambda_{\alpha}\mu_{\beta}-\mu_{\alpha}\lambda_{\beta}$ $(S_{in+1}=R_i)$;

$K=\mu_{\beta}\dot{x}^{\beta}$, $\omega=\lambda_{\alpha}\dot{x}^{\alpha}$.

И. С. Аржаных

3399. Характеристика финслеровых пространств с абсолютным параллелизмом линейных элементов. В а р г а (Eine Charakterisierung der Finslerschen Räume mit absolutem Parallelismus der Linienelemente. V a r g a O.), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 128—131 (нем.)

Если $g_{\alpha\beta}(x,\ v)$ есть метрический тензор финслерова пространства F_n, рассматриваемого как многообразие линейных элементов $(x^{\alpha},\ v^{\alpha})$ и $r^{\alpha}(x)$ — поле касательных векторов к полю экстремалей, то тензор $\gamma_{\alpha\beta}(x)=g_{\alpha\beta}(x,\ r(x))$ определяет риманову метрику; соответствующее ему риманово пространство V_n называется соприкасающимся V_n. Автор доказывает следующую теорему: Для того чтобы в финслеровом пространстве F_n (или в некоторой его области) существовал абсолютный параллелизм линейных элементов, необходимо и достаточно выполнение двух условий: 1) в F_n (или в некоторой его области) существует такое множество полей экстремалей, что совокупность их касательных векторов в любой точке содержит вектор любого направления, 2) соприкасающееся V_n, соответствующее любому данному полю экстремалей из указанного множества, обладает группой трансляций, траекториями которой служат экстремали данного поля экстремалей.

Примечание референта. Необходимость условия 1) доказана недостаточно ясно, не показано, что в рассматриваемой области ни одно поле экстремалей не содержит фокальных точек. А. Е. Либер

3400. О теореме Лефшеца и лемме Энриквеса — Севери — Зарискго. К о д а и р а, С п е н с е р (On a theorem of Lefschetz and the lemma of Enriques — Severi — Zariski. K o d a i r a K., S p e n c e r D. C.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, 1953, 39, № 12, 1273—1278 (англ.)

Рассматривается компактное келерово многообразие V комплексной размерности n и его неособое аналитическое подмногообразие S комплексной размерности $n-1$, задаваемое уравнением $s_j=0$ в каждой области U_j достаточно мелкого покрытия V. Пусть далее $\{S\}$ — пучок комплексных линий (РЖМат, 1954, 3272), определяемый системой голоморфных функций $s_{jk}=s_j/s_k$, заданных соответственно в $U_j\cap U_k$, F — произвольный пучок комплексных линий, $F_m=m\{S\}-F$, $c(F_m)$ — характеристический класс пучка F_m

(РЖМат, 1954, 3273). Обозначим через r'^* естественное отображение классов верхних гомологий $H^q(V, \mathfrak{G}) \to H^q(S, \mathfrak{G})$ ($\mathfrak{G}$ — область коэффициентов). Используя результаты предыдущей работы Кодаира (см. реф. 3393), авторы доказывают следующую теорему.

Пусть каждый класс $c(F_m)$ при $m = 1,2, \ldots, n$ содержит соответственно замкнутую форму $\gamma_m > 0$ типа (1,1), для которой формы $\theta^{p,\,q}(\gamma_m,\ u,\ z)$, $1 \leqslant p, q \leqslant n$ положительно определены в каждой точке z из V (см. реф. 3393). Тогда отображение r'^* является изоморфизмом $H^q(V,\ \Omega^p(F))$ в $H^q(S,\ \Omega^p(F_s))$ при $p+q=n-1$ и изоморфизмом на $H^q(S,\ \Omega^p(F_s))$ при $p+q<n-1$ (здесь F_s означает пучок F, рассматриваемый на S; группы гомологий берутся с коэффициентами в пучке $\Omega^p(F)$.

Эта теорема является обобщением теоремы Лефшеца, относящейся к случаю, когда V — неособое алгебраическое многообразие, а S — его плоское сечение (Lefschetz S., L'Analysis situs et la géometrie algébrique, Paris, Gauthier-Villars, 1924, 88—91).

Специальным случаем доказанной теоремы является также лемма Энриквеса — Севери — Зариского: Пусть D — дивизор неособого алгебраического многообразия V. Существует целое число $h_0(D)$, зависящее только от D, такое, что при $h \geqslant h_0$ имеет место изоморфизм

$$r'^* : H^0(V,\ \Omega^0(\{D\})) \simeq H^0(S_h,\ \Omega^0(\{D\}_{S_h}))$$

(S_h обозначает плоское сечение V общей гиперплоскостью порядка h; $\{D\}$ — пучок комплексных линий над V, отвечающий D, $\{D\}_{S_h}$ — тот же пучок над S_h) (Zariski O., Ann. Math., 1952, 55, 552—592).

Авторы вводят понятие дефекта (deficiency) пучка F над S, полагая:

$$\operatorname{def}(F/S) = \dim H^0(S,\ \Omega^0(F_s)) - \dim r'^* H^0(V,\ \Omega^0(F)).$$

Показывается, что характеристический дефект $\operatorname{def}(\{S\}/S)$ для неособого, простого (prime) дивизора $S \subset V$ не превышает числа линейно независимых простых дифференциалов 1-го рода (т. е. гармонических форм 1-го порядка, зависящих от z_i и dz_i, но не зависящих от $\overline{z_i}$ и $d\overline{z_i}$) на V и равен ему, если в классе $c(S) + c_1$ содержится действительная замкнутая форма $\gamma > 0$ типа (1,1) (c_1 — первый класс Черна многообразия V). И. З. Розенкноп

3401. О параллельном переносении с сохранением длины в локально-Минковского пространстве. I, II. Бартель (Über eine Parallelverschiebung mit Längeninvarianz in lokal-Minkowskischen Räumen. I, II. Barthel Woldemar), Arch. Math., 1953, **4**, № 4, 346—354; № 5, 355—365 (нем.)

В n-мерном пространстве Минковского с определяющей функцией $L(X)$ произвольного вектора X — его длиной, т. е. удовлетворяющей условиям

$$L(X) = L(-X) > 0,\quad L(\lambda X) = \lambda L(X),$$
$$L(X) + L(Y) > L(X+Y), \qquad (1)$$

каждому n-эдру, натянутому на векторы A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), можно поставить в соответствие меру (объем)

$$J(A_1, A_2 \ldots A_n) = F^{(n)}\left|\,\|\,A_1 A_2 \ldots A_n\|\,\right|,$$

а потому n-мерной области θ-величину

$$J(\theta) = F^{(n)} \int_\theta dx^1 \ldots dx^n.$$

Скаляр $F^{(n)}$ определяется из условия, что объем $\omega^{(n)}$ единичного шара $L(X) = 1$ равен так же, как и в евклидовом пространстве,

$$\omega^{(n)} = \pi^{n/2} / \Gamma(n/2+1)$$

В каждой p-мерной плоскости $\mathfrak{M}_p$ $x^i = x^i_\rho U^\rho + a^i$ индуцируется своя метрика Минковского $\overline{L}(U) = L(x^i_\rho U^\rho)$. P-мерной площадью в $\mathfrak{M}_p$ называется объем, полученный, как выше, из индуцированной метрики $\overline{L}(U)$

$$J^{(p)} = F^{(p)}(x^i_\rho) \int du^1 \ldots du^p,$$

причем $F^{(p)}$ будет, очевидно, зависеть от координат плоскости $\mathfrak{M}_p$. Так для гиперплоскости, определяемой векторами $X_1(x^i_1) \ldots X_{n-1}(x^i_{n-1})$, эта функция будет зависеть от $p_k = \|\,\delta^i_k x^i_1 \ldots x^i_{n-1}\|$, $F^{(n-1)} = F(p_k)$ (Barthel W., Math. Z., 1953, 58, 358—375).

Если финслерово пространство, основанное на интеграле

$$\int L(x, \dot{x})\, dt, \qquad (2)$$

рассматривать как локально-Минковского, с каждой точкой которого x связано пространство Минковского с определяющей функцией $L(x, X)$, то к каждой точке x можно присоединить меру любой плоскости $\int F(x, x^i_\rho)\, du^1 \ldots du^\rho$, в том числе меру гиперплоскости $\int F(x, \rho)\, du^1 \ldots du^{n-1}$. Поэтому к этому пространству можно присоединить два основных тензора

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L(x, X)}{\partial X^i \partial X^j} \quad \text{и} \quad G^{ij} = \frac{1}{2F^{(n)^2}}\frac{\partial^2 F(x, p)^2}{\partial p_i\, dp_j}$$

и соответствующие две связности (ср. Cartan E., L'espaces de Finsler, Paris, 1934; L'espaces métriques fondés sur la notion d'aire, Paris, 1933). Естественно, что в римановом случае оба основных тензора и обе связности совпадают.

Для произвольной кривой в финслеровом пространстве кривизна равна

$$\varkappa(t) = F^{(2)}\left(x,\ \dot{x},\ \frac{D\dot{x}}{dt}\right),$$

где $\dfrac{D\dot{x}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dot{x}^i + \left[\begin{matrix} i \\ rs \end{matrix}\right](x, \dot{x})\dot{x}^r \dot{x}^s = 0$ — уравнения Эйлера — Лагранжа для интеграла (2), $\left[\begin{matrix} i \\ rs \end{matrix}\right]$ — символ Христофеля для тензора g_{ij}.

Вычисляются нормальная кривизна линий на гиперповерхности и формулы Вейнгартена для нее.

М. В. Васильева

3402. Элементарные основные принципы обобщенной теории относительности. C_1. Введение. Главатый (The elementary basic principles of the unified theory of relativity. C_1. Introduction. Hlavatý Václav), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, **3**, № 1, 103—146 (англ.)

Продолжение работы под тем же названием (РЖМат, 1955, 1466), причем теперь автор ограничивается случаем $n = 4$. Мы сохраняем прежние соглашения и обозначения (автор частично видоизменяет обозначения).

Вводится ряд новых тензоров и тензорных плотностей; последние обозначаются готическими буквами:

$$\mathfrak{F}^{\lambda\mu} = -\sqrt{|g|}\, g^{[\lambda\mu]},\quad F_{\lambda\mu} = \mathfrak{F}_{\lambda\mu}/\sqrt{|h|},$$
$$m_{\lambda\nu} = e_{\lambda\nu\alpha\beta}\mathfrak{F}^{\alpha\beta}/2,\quad m^{\lambda\mu} = \sqrt{|h|}\, m^{\lambda\mu}.$$

Здесь $g = \det|g_{\lambda\mu}|$, $h = \det|h_{\lambda\mu}|$, $e_{\lambda\nu\alpha\beta}$ — кососимметрическая по всем индексам тензорная плотность веса 1,

причем $e_{1234}=1$ в любой системе координат. Весьма подробно изучаются формальные свойства введенных тензоров.

Тензору $m_{\lambda\mu}$ предназначается в дальнейшем роль тензора электромагнитного поля.

Вводится тензор кривизны

$$R^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda}=\partial_\mu\Gamma^\nu_{\lambda\omega}-\partial_\omega\Gamma^\nu_{\lambda\mu}+\Gamma^\nu_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\omega}-\Gamma^\nu_{\alpha\omega}\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}$$

и свернутые тензоры кривизны и кручения

$$R_{\mu\lambda}=R^{\cdots\alpha}_{\alpha\mu\lambda},\ V_{\omega\mu}=R^{\cdots\alpha}_{\omega\mu\alpha},\ S_\lambda=S_\lambda=S^{\cdots\alpha}_{\lambda\alpha},$$

а также введенный Эйнштейном тензор $P_{\lambda\mu}$ (в обозначениях Эйнштейна $R_{\lambda\mu}$):

$$P_{\lambda\mu}=\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}-\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\mu}-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\Gamma^\alpha_{(\lambda\alpha)}+\partial_\lambda\Gamma^\alpha_{(\mu\alpha)}\right)+$$
$$+\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\Gamma^\beta_{(\alpha\beta)}.$$

Изучаются формальные свойства этих тензоров; в частности

$$V_{\omega\mu}=2\partial_{[\omega}S_{\mu]},\ P_{\lambda\mu}+R_{\mu\lambda}=D_\mu S_\lambda,$$

где D_μ — ковариантное дифференцирование в связности $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ (индекс дифференцирования — второй индекс внизу).

Вводится третий и последний принцип («принцип C») излагаемой теории. Он заключается в том, что, кроме условия (B) (РЖМат., 1955, 1466), на $g_{\lambda\mu}$ и $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ накладываются условия

$$S_\lambda=0,\ R_{\mu\lambda}=0 \qquad (C)$$

или, в ослабленной форме,

$$S_\lambda=0,\ R_{(\mu\lambda)}=0,\ \partial_{[\omega}R_{\mu\lambda]}=0. \qquad (C')$$

Условия (C) и (C′) можно объединить в одной записи:

$$S_\lambda=0,\ R_{\mu\lambda}=\partial_{[\mu}X_{\lambda]}=0, \qquad (C'')$$

где X_λ — некоторый вектор, градиентный в случае (C) и произвольный в случае (C′). Условия (C) равносильны тому, что при свертывании тензора кривизны, равно как и тензора кручения, всегда получается 0.

Автор показывает что, система уравнений (B), (C) совместна (вопрос, не выясненный Эйнштейном). Этот результат вытекает из примера

$$\|g_{\lambda\mu}\|=\begin{Vmatrix}-1 & 0 & 0 & k_{14}\\ 0 & -r^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta & 0\\ k_{41} & 0 & 0 & h_{44}\end{Vmatrix},$$

где $x^1\equiv r$, $x^2\equiv\theta$, $x^3\equiv\varphi$, $x^4=t$ (т. е. «пространственные» координаты x^1, x^2, x^3 являются как бы полярными). При этом $k_{14}(=-k_{41}\neq 0)$ и $h_{44}(>0)$ суть функции только r

$$k_{14}=\varepsilon\sqrt{|BA|}\,r^{-2},\ h_{44}=B(1-Ar^{-4}),$$

где $A<0$ и $B>0$ — константы и $\varepsilon=\pm 1$.

Соответствующая связность имеет вид:

$$\Gamma^1_{22}=-r,\ \Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta,\ \Gamma^1_{44}=-\frac{h'_{44}}{2},$$

$$\Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=r^{-1},$$

$$\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=\operatorname{ctg}\theta,\ \Gamma^1_{14}=-\Gamma^1_{41}=-2\Gamma^2_{24}=$$
$$=2\Gamma^2_{42}=-2\Gamma^3_{34}=2\Gamma^3_{43}=2k_{14}r^{-1}.$$

Остальные $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}=0$. Определенные таким образом $g_{\lambda\mu}$, $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ удовлетворяют условиям (B), (C).

Далее рассматриваются те конформные преобразования $g_{\lambda\mu}\to\rho^2 g_{\lambda\mu}$, которые (при подходящем преобразовании связности $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$) не нарушают соотношений (B) и $S_\lambda=0$. Исследуется вопрос о решении системы уравнений (B) относительно $g_{\lambda\mu}$ при заданных $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$. Находятся условия, накладываемые на тензор $T^\nu_{\lambda\mu}$, необходимые и достаточные для того, чтобы связность $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}=$ $={}^0\Gamma^\nu_{\lambda\mu}+T^\nu_{\lambda\mu}$ удовлетворяла уравнениям (C″) в предположении, что ${}^0\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ удовлетворяет второму из этих уравнений. Излагается еще некоторое число формальных результатов в этом же роде. П. К. Рашевский

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

3403. К теории решеток. Кнезер (Zur Theorie der Kristallgitter. Kneser Martin), Math. Ann., 1954, **127**, № 1, 105—106 (нем.)

В работе Эйхлера (Eichler M., Math. Ann., 1952, 125, 51—55) доказывается теорема: Решетка в пространстве с положительной метрикой может быть разложена в прямую сумму взаимно ортогональных подрешеток, каждая из которых уже не допускает такого разложения. Указанное разложение единственно.

В реферируемой работе дается более простое доказательство этой теоремы. Д. К. Фаддеев

3404. Теорема о функциях на сфере. Ангар (Freak theorem about functions on a sphere. Ungar Peter), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 113, 100—103 (англ.)

Пусть f — непрерывная функция на поверхности сферы такая, что если C — любой сферический сегмент радиуса α, то

$$\int_C f\,dw=0. \qquad (1)$$

Тогда имеется множество значений α, всюду плотное в $(0,\pi/2)$, для которого из (1) не следует $f\equiv 0$, и такое же множество значений α, для которого из (1) следует $f\equiv 0$.

Доказательство основано на лемме: для любого $\varepsilon>0$ существует положительное целое число n такое, что $\Pi_n(\mu)=\int_\mu^{\pi} P_n(x)\,dx$ имеет нули в каждом интервале длины ε, содержащемся в $(0,1)$, где P_n — полином Лежандра. Откуда множество S всех корней полиномов $\Pi_n(\cos\theta)$ всюду плотно в $<0,\pi/2>$.

Для некруговых областей показывается существование областей D_0, где $\int_{D_0} f\,dw\equiv 0$, без того, чтобы $f\equiv 0$.

Автор кратко останавливается на родственных вопросах, затронутых другими авторами. П. В. Тихонов

3405. Порождаемые функции порядка. Карцель (Erzeugbare Ordnungsfunktionen. Karzel Helmut), Math. Ann., 1954, **127**, № 3, 228—242 (нем.)

Под функцией порядка $h(\alpha)$ автор, следуя Э. Шпернеру (Sperner E., Math. Ann., 1949, 121, 107—130), понимает функцию переменных h и α (где h — гиперплоскость и α — точка), принимающую значения $0,1,-1$ (0, если h и α инциденты; 1 или -1 относятся по любому закону к неинцидентным парам). Для построения функций порядка в проективном пространстве P_n над телом K производится разделение K на два класса >0 и <0, причем не пред-

полагается, что знаки $\gtrless 0$ удовлетворяют закону монотонности умножения. Далее нормируются координатные векторы точек α и гиперплоскостей h: из всех векторов точки α $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $\lambda = \bar{x}\lambda$ и всех векторов гиперплоскости $h\,\mu\,(u_0, u_1, \ldots, u_n) = \mu\bar{u}$ выбираются какие-нибудь определенные $\bar{x}_\alpha$ и $\bar{u}_h$. После этого полагают $h(\alpha) = 0, 1, -1$, в зависимости от того, будет ли скалярное произведение $\bar{u}_h\bar{x}_\alpha = 0$, либо >0, либо <0. Определенная таким образом функция $h(\alpha)$ называется порождаемой функцией порядка. Во всякой проективной геометрии существуют функции порядка, которые не являются порождаемыми. Множество всех функций порядка некоторой проективной геометрии составляет коммутативную группу, базу ее образуют функции порядка, которые для единственной неинцидентной пары принимают значение -1, а для всех остальных пары равны 1. Эти базисные функции являются порождаемыми, если тело K архимедовски расположено; в противном случае они могут быть представлены как произведение двух порождаемых функций. Порождаемые функции порядка, составляя систему образующих группы всех функций порядка, не могут входить в состав ее одной какой-нибудь собственной подгруппы.

С каждой порождаемой функцией порядка связывается экваторная система, т. е. система точек и плоскостей со следующими свойствами: 1) каждой паре точек α, β соответствует экваторная точка $\varepsilon_{\alpha\beta}$, лежащая на прямой, соединяющей α и β; три экваторных точки $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\beta\gamma}$, $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ всегда лежат на одной прямой, 2) каждой паре гиперплоскостей g, h соответствует экваторная плоскость i_{gh}, принадлежащая пучку, определяемому плоскостями g и h; три экваторных плоскости i_{gh}, i_{hk}, i_{gk} всегда принадлежат одному пучку. Всякой экваторной системе однозначно соответствует класс эквивалентных нормирований, производящих одинаковое разделение на зоны пар $\{h, \alpha\}$ с одним и тем же произведением $\bar{u}_h\bar{x}_\alpha$. Порождаемые функции порядка могут быть построены чисто геометрическими средствами с помощью непосредственно задаваемых экваторных систем. А. Г. Школьник

3406 Д. Исследования по геометрии близости. Яруткин Н. Г., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

3407. О разбиении плоских выпуклых областей хордами. Плейель (Über die Teilung von ebenen konvexen Bereichn durch Sehnen. Pleijel Arne), Math. scand., 1954, **2**, № 1, 74—82 (нем.)

Если ограниченная выпуклая область на плоскости делится хордой BC на две части и отношение $F_1/F_2 = k$ их площадей фиксировано, то отношение $L_1/L_2 = q$, в котором делится периметр этой области, остается в пределах $1 + 2k > q > k/(2 + k)$ независимо от вида области и расположения хорды BC.

Для доказательства фиксируются опорные прямые в точках B и C. Первая из выпуклых дуг BC варьируется в пределах области между этими опорными прямыми так, чтобы значение F_1 осталось прежним, а L_1 стало минимальным; вторая дуга изменяется с сохранением F_2 до максимума L_2. Рассматривая получающиеся фигуры (их контур состоит из двух отрезков и дуги окружности), автор устанавливает первое из неравенств; второе получается простой сменой роли областей. Кроме того, устанавливается, что $1 + 2k - q > F^2L^{-4}$, где F, L — площадь и периметр исходной области. Из этого выводится, что предыдущие неравенства, вообще говоря, не могут быть улучшены. В. А. Залгаллер

3408. О моментах первого и второго порядка в интегральной геометрии. Мюллер (Über Momente ersten und zweiten grades in der Integralgeometrie. Müller Hans Robert), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, **2**, № 1, 119—139 (нем.)

Пусть $F = F(B)$ — площадь, $U = U(K)$ — длина и $F_i = F_i[B] = \int\limits_B x_i\dot{x}_1\dot{x}_2$, $F_{ij} = \int\limits_B x_ix_j\dot{x}_1\dot{x}_2$, $U_{ij} = \oint\limits_K x_ix_j\dot{s}$, $C_{ij} = \oint\limits_K x_ix_j\dot{\varphi}$ (в интегральной геометрии принято обозначать dx через $\dot{x}$) — моменты области B и ее границы K, являющейся выпуклой кривой с опорной функцией $p(\varphi)$. Устанавливаются соотношения, связывающие F, U, ..., C_{ij} с такими же величинами для варьированной области B^h, ограниченной выпуклой кривой K^h с опорной функцией $p(\varphi) + h$ $(h > 0)$. Из этих соотношений следуют формулы вида

$$\frac{dF_i(h)}{dh} = U_i(h), \quad \frac{dU_i(h)}{dh} = C_i(h), \qquad (1)$$
$$\frac{dF_{ij}(h)}{dh} = U_{ij}(h), \frac{dU_{ij}(h)}{dh} = C_{ij}(h) + 2\delta_{ij}F(h) \text{ и т. п.}$$

($F_i(h) = F_i(B^h)$, $U_i(h) = U_i[K^h]$, ..., δ_{ij} — символ Кронекера). Формулы (1) обобщаются на случай вариации области B вовнутрь в смысле Боля (Bol G., Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1941, **51**, 219—257). Далее автор рассматривает подвижную выпуклую область G и неподвижную G'. Устанавливаются формулы

$$\int F_i[G \cap G']\,\dot{G} = 2\pi F[G]\,F_i[G'],$$
$$\int F_{ij}[G \cap G']\,\dot{G} = 2\pi F[G]\,F_{ij}[G'],$$
$$\int U_i[G \cap G']\,\dot{G} = 2\pi\{F[G]\,U_i[G'] + U[G]\,F_i[G']\},$$
$$\int U_{ij}[G \cap G']\,\dot{G} = 2\pi\{F[G]\,U_{ij}[G'] + U[G]\,F_{ij}[G']\} \text{ и т. п.}$$

Здесь $\dot{G}$ — кинематическая плотность, $U[G]$, $U_i[G]$, ..., $U_{ij}[G \cap G']$ — длина и моменты границы областей G и $G \cap G'$. Г. И. Дринфельд

См. также: 2989, 3001, 3065, 3107, 3121, 3126, 3137, 3142, 3149, 3150, 3176

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

3409. Построение решений и распространение ошибок в нелинейных задачах. Блок (Construction of solutions and propagation of errors in nonlinear problems. Block H. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 715—722 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$Fx = y, \qquad (1)$$

где x и y принадлежат пространствам X и Y соответственно. Пусть удается найти пространство Z и преобра-

зования A из Y в Z и B из Z в X, так что в Z преобразование $R = I - AFB$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной, меньшей единицы. Уравнение (1) преобразуется к виду $z = Rz + Ay$ и решается методом последовательных приближений: $z_{n+1} = Rz_n + Ay$. При соблюдении некоторых дополнительных условий доказывается сходимость последовательности $x_n = Bz_n$ к единственному решению уравнения (1) со скоростью геометрической прогрессии. Пространства X, Y, Z предполагаются метрическими абелевыми группами. Теорема иллюстрируется примером, относящимся к задаче Коши для уравнения

$$Fx \equiv \dot{x} + C(\dot{x}, t) + D(\dot{x}, t) + px + E(x, t) = y(t),$$

где C, D, E удовлетворяют по первому аргументу условию Липшица с достаточно малыми постоянными, p — положительная постоянная.

Пусть, далее, W — метрическое пространство, в котором определено умножение на число (не обязательно ассоциативное). Определяются собственные числа и функции для преобразования W в себя, и доказывается сходимость некоторого итеративного процесса, служащего для их построения.

Примечание референта. В формулировке теоремы 3 опущено условие (h_3). М. К. Гавурин

3410. Об оценке погрешностей экстраполяционного метода Адамса. II. Уравнения второго и высших порядков. Матьё (Über die Fehlerabschätzung beim Extrapolationsverfahren von Adams. II. Gleichungen zweiter und höherer Ordnung. Matthieu P.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 1—2, 26—41 (нем.; резюме англ., франц., русс.)

Метод оценки ошибок, разработанный автором (Z. angew. Math. und Mech., 1951, **31**, 356—370), распространяется им на уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ и высших порядков. Составляется уравнение в вариациях $\delta'' = \delta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \delta \frac{\partial f}{\partial y} + f(x, y^*, y^{*\prime}) - y^{*\prime\prime}$, где y^*—приближенное решение, $\delta(x) = y(x) - y^*(x)$; подсчитывается выражение $f(x, y^*, y^{*\prime}) - y^{\prime\prime *}$, зависящее от ошибок метода ($\Delta^k f_n$). Решение уравнения в вариациях оценивается различными методами сверху и снизу, в частности строится мажорирующее решение методом типа метода С. А. Чаплыгина. При использовании интерполяционного метода Адамса (до третьих разностей) уравнение в вариациях то же, а ошибки метода по абсолютной величине в 13 раз меньше соответствующих ошибок экстраполяционного метода и имеют противоположный знак (ошибки округления не рассматриваются).

Полученные оценки в рассмотренных примерах близки к действительным погрешностям. Метод обобщается на уравнения высших порядков. М. Л. Бродский

3411. Об одном приближенном методе в одномерной краевой задаче. Рапопорт И. М., Укр. матем. ж., 1954, **6**, № 2, 202—217

В начале работы дается явное выражение для интерполяционного многочлена Маркова — Эрмита, построенного по значениям функции и ее первых n производных в двух узлах, а также квадратурная формула, получающаяся интегрированием этого многочлена.

Для системы линейных дифференциальных уравнений $y'(x) = A(x, \lambda)\, y(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, с граничными условиями $B(\lambda)\, y(0) + C(\lambda)\, y(l) = 0$, где $y(x)$ — вектор-функция, A, B и C — заданные матрицы, предлагается следующий приближенный метод получения собственных значений. Разбив интервал $(0, l)$ на m равных частей, применяют к интегралу $\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\, dx = y(x_{k+1}) - y(x_k)$, $x_k = kl/m$, упомянутую выше квадратурную формулу. Выразив далее производные через значения функции с помощью линейных соотношений, получающихся дифференцированием исходной системы дифференциальных уравнений, и присоединив граничные условия, получают линейную однородную систему уравнений относительно значений неизвестных функций в выбранных точках. Приравнивание нулю определителя этой системы дает уравнение, корни которого приближенно равны искомым собственным значениям. Для каждого корня λ можно, решив соответствующую однородную систему, найти значения собственной функции, вычислить по ним с помощью полученных ранее линейных соотношений значения производных и, наконец, используя данную в начале работы интерполяционную формулу, построить кусочное аналитическое приближение собственной функции. В случае самосопряженной задачи предлагается для анализа точности применить (используя найденное приближение к собственной функции) одну оценку собственных значений, данную Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым. Метод иллюстрируется для $m = 2$ и $n = 3$ на примере задачи $f'' + \lambda x f = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(0) = f(1) = 0$. Оценки по формулам Крылова и Боголюбова показывают, что ошибка не превосходит 0,2%.

Примечание референта. Выведенные автором интерполяционная и квадратурная формулы не являются новыми (см., например, Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 1951; Микеладзе Ш. Е., Численные методы математического анализа, 1953; квадратурная формула дана с ошибкой). К. А. Семендяев

3412. Дискуссия по статье Джейкобсена «Об общем методе решения дифференциальных уравнений второго порядка путем смещения фазовой плоскости». Пейнтер (On a general method of solving second-order differential equations by phase-plane displacements. Paynter H. M.), J. Appl. Mech., 1953, **20**, № 2, 301—303 (англ.)

Рассматривается «дельта метод» графического интегрирования, предложенный Джейкобсеном (Jacobsen L. S., J. Appl. Mech., 1952, **19**, № 4, 543—553). Утверждается, что этот метод является частным случаем более общего приема Мейсснера (Meissner E., Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion Verlag der Schweiz. Bauzeitung, Zürich, 1932).

Дается аналитическое обоснование метода Джейкобсена, основанное на сведении уравнения

$$\ddot{x} + x = -\delta(x, \dot{x}, t) \qquad (1)$$

к системе $\dot{v} + x = -\delta(x, v, t)$, $\dot{x} = v$, решение которой для начальных условий типа $\tau = \tau_i$, $x = x_i$, $v = v_i$ при постоянстве $\delta = \delta_i$ (для $\tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1}$) приводит к фазовому соотношению $(x + \delta_i)^2 + v^2 = (x_i + \delta_i)^2 + v_i^2$. Уравнение (1) — аналитическая основа графического δ-метода — обосновывает и метод численного интегрирования, выражаемый формулами: начальный радиус $r_i = v_i \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_i}$, тангенс начального угла $\operatorname{tg} \beta_i = (x_i + \delta_i)/v_i$, окончательный угол $\beta_{i+1} = \alpha + \beta_i$, $\alpha = \Delta\tau_i$, окончательное смещение $x_{i+1} = r_i \sin \beta_{i+1} - \delta_i$, окончательная скорость $v_{i+1} = r_i \cos \beta_{i+1}$. Утверждается, что вычисления по этим формулам зачастую удобнее графических построений. Отмечается недостаточная точность метода вблизи особых точек. Приведены возражения Джейкобсена, опровергающего утверждение, что его метод является частным случаем метода Мейсснера, и полагающего, что графический δ-метод имеет право на существование. Г. Ю. Джанелидзе

3413. Решение нелинейных дифференциальных уравнений методом сведения; формулы для первых

13 членов. **Кон, Солцберг** (Solution of nonlinear differential equations by the reversion method through the first thirteen terms. Cohn George I., Saltzberg Bernard), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 2, 252—254 (англ.)

Метод сведения применяется к уравнениям вида $\sum_{k=1}^{n} Z_k [I(t)]^k = \lambda V(t)$, где $I(t)$—неизвестная функция, Z_k — линейные операторы (дифференциальные или интегральные). Полагая $I = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m I_m$, получим для функций $I_m(t)$ систему линейных уравнений, из которой они могут быть последовательно определены. В работе в явном виде выписана эта система для $m \leqslant 13$.

М. Л. Бродский

3414. Метод Бэшфорта — Адамса численного решения дифференциальных уравнений. Б у т (Bashforth-Adams method for the numerical solution of differential equations. Booth Andrew D.), Nature, 1954, **173**, № 4405, 635—636 (англ.)

Указывается, что хотя методом Адамса иногда называют лишь экстраполяционный метод (без пересчета), в первоначальной работе Бэшфорта и Адамса (Bashforth F., Adams J. C., An Attempt to test the theories of capillary action, Cambridge, 1883) были приведены и формулы для пересчета ($y_n = y_{n-1} + h(f_n - \frac{1}{2}\nabla f_n - \frac{1}{12}\nabla^2 f_n - \ldots)$, значительно улучшающие метод.

М. Л. Бродский

3415. Новый метод численного интегрирования. Б е р т ь о (Nieuwe numerieke integratiemethoden. Bertiau F.), Simon Stevin, 1951/52, **29**, № 4, 196—202 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (голл.)

Путем простых и известных рассуждений автор подсчитывает коэффициенты некоторых квадратурных формул, в которые входят также производные интегрируемой функции. Все формулы интерполяционного типа, абсциссы считаются равноотстоящими и ординаты с номерами, наибольшими по абсолютному значению, отвечают концам отрезка интегрирования:

1. $$\int_{-\frac{1}{2}H}^{\frac{1}{2}H} y\,dx = H[A_0 y_0 + A_1(y_1 + y_{-1}) + HB_1(y_1' - y_{-1}')],$$
$$A_0 = {}^{32}/_{60},\ A_1 = {}^{14}/_{60},\ B_1 = {}^{-1}/_{60}.$$

2. $$\int_{-\frac{1}{2}H}^{\frac{1}{2}H} y\,dx = H[A_0 y_0 + A_1(y_1 + y_{-1}) + A_2(y_2 + y_{-2}) + HB_1(y_1' - y_{-1}') + HB_2(y_2' - y_{-2}')].$$

Коэффициенты подсчитаны с 12—16 знаками

3. $$\int_{-\frac{1}{2}H}^{\frac{1}{2}H} y\,dx = H[A_0 y_0 + A_1(y_1 + y_{-1}) + A_2(y_2 + y_{-2}) + A_3(y_3 + y_{-3}) + A_4(y_4 + y_{-4}) + HB_1(y_1' - y_{-1}') + HB_2(y_2' - y_{-2}') + HB_3(y_3' - y_{-3}') + HB_4(y_4' - y_{-4}')].$$

Коэффициенты вычислены с 15 знаками

4. $$\int_{-\frac{1}{2}H}^{\frac{1}{2}H} y\,dx = H[A_0 y_0 + A_1(y_1 + y_{-1}) + A_2(y_2 + y_{-2}) + HB_1(y_1' - y_{-1}')],$$
$$A_0 = 972/1890,\ A_1 = 352/1890,\ A_2 = 107/1890,\ B_1 = 60/1890.$$

5. $$\int_{-\frac{1}{2}H}^{\frac{1}{2}H} y\,dx = H[A_0 y_0 + A_1(y_1 + y_{-1}) + A_2(y_2 + y_{-2}) + A_3(y_3 + y_{-3}) + A_4(y_4 + y_{-4}) + HB_1(y_1' - y_{-1}') + HB_2(y_2' - y_{-2}') + HB_3(y_3' - y_{-3}')].$$

Коэффициенты даны с 16 знаками.

Желая рассмотреть интегрирование функций, у которых первая производная обращается в бесконечность на концах отрезка интегрирования, автор строит две формулы очень частного вида, приспособленные к такой задаче.

1. $$\int_{-\frac{1}{2}H}^{\frac{1}{2}H} y\,dx = H[A_0 y_0 + A_1 y_1 + A_{-1} y_{-1} + HB_1 y_1'].$$

Коэффициенты определяются из условия, чтобы механическая квадратура давала точный результат для всевозможных функций вида $y = A\sqrt{(x + \frac{1}{2}H)} + B + Cx + Dx^2$.

2. $$\int_{-2H}^{2H} y\,dx = H[Ay_0 + A_1 y_1 + A_{-1} y_{-1} + A_2 y_2 + A_{-2} y_{-2} + HB_0 y_0' + HB_1 y_1' + HB_{-1} y_{-1}'].$$

Требуется точное выполнение равенства для всевозможных функций $y = A + B\sqrt{x + 2H} + Cx + \ldots + Kx^6$. В обеих последних формулах коэффициенты вычислены с 13 знаками.

В. И. Крылов

3416. Разложение конечной разности от функции по разностям от ее производной. М и к е л а д з е Ш. Е., Докл. АН СССР, 1953, **92**, № 3, 479—482

Для численного неопределенного интегрирования и решения дифференциальных уравнений необходимо бывает строить формулы, дающие выражение разностей от функции через разности производной от нее какого-либо порядка, или же формулы, которые давали бы значения функции через значения производной и значения разностей и сумм от нее. В статье приведено несколько таких формул и указано на возможность их использования в упомянутых выше задачах, но не выяснено в каких отношениях формулы автора предпочтительнее известных формул такого рода. Формулы автора следующие:

1. $$\Delta^n f(a + \lambda h) = h^n \sum_{\rho=0}^{r} A_{n,\rho} \Delta^\rho f^{(n)}(a) + R_{n,r},$$
$$A_{n,\rho} = [(n-1)!]^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \times \int_0^{\lambda+\nu} (\lambda + \nu - t)^{n-1} \binom{t}{\rho} dt.$$

2. $$\nabla^n f(a) = h^n \sum_{\rho=0}^{r} (-1)^\rho A_{n,\rho} \nabla^\rho f^{(n)}(a) + \overline{R}_{n,r},$$

$A_{n,\rho}$ даются предыдущими равенствами при $\lambda = 0$.

3. $$\delta^{2n} f(a) = [h^{2n}/(2n-1)!] \times \sum_{\rho=0}^{r} S_{n,\rho} \delta^{2\rho} f^{(2n)}(a) + R_{n,r},$$
$$S_{n,0} = 1,\ S_{n,\rho} = [2/(2n-1)!\,(2\rho)!] \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} \times \binom{2n}{n-\nu} \int_0^{\nu} (\nu - t)^{2n-1} t^2 (t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \ldots [t^2 - (\rho-1)^2]\,dt,\ 0 \leqslant \rho \leqslant r.$$

4. $$f_m = h^n \left\{ \sum^{n} f_{m+n}^{(n)} - A_{n,1} \sum^{n-1} f_{m+n-1}^{(n)} + \right.$$

$$+\ldots+(-1)^n A_{n,n} f_m^{(n)}+$$

$$+\sum_{\rho=n+1}^{r}(-1)^\rho A_{n,\rho}\Delta^{\rho-n} f_{m+n-\rho}^{(n)}\}.$$

В. И. Крылов

3417. **Дифференцирование экспериментальных зависимостей при помощи конечных разностей высших порядков. Ван Цзи-де, Де-Санто** (Differentiation of experimental data by means of higher order finit-difference formulas. Wang Chi-Teh, De Santo Daniel F.), J. Aeronaut. Sci., 1953, **20**, № 11, 792—793 (англ.)

Приводятся три известных варианта формул для первой и второй производной: через центральные разности, при интерполировании вперед и при интерполировании назад (Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 1949, 192—193). В формулах удержаны разности до четвертого порядка включительно. Для конкретного примера $x = 6\sin t + 0{,}5\sin 3t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ дана оценка средней квадратической ошибки вычисления первой и второй производной $\dot{x}$ и $\ddot{x}$. Я. Г. Пановко

3418. **Методы вычислений первой и второй производной таблично заданных функций. Шерман, Смит** (Methods for determining the first and second derivatives of experimental data. Schurmann Ernest E. H., Smith Theron L.), J. Aeronaut. Sci., 1954, **21**, № 6, 420—421 (англ.)

Таблица 50 коэффициентов, выражающих $f'(x_k)$ и $f''(x_k)$ $(-2 \leqslant k \leqslant 2)$ через $f(x_i)$ $(-2 \leqslant i \leqslant 2)$, где $x_i = ih$. М. Л. Бродский

3419. **О различных процедурах для определения периодов приливов и отливов и их предсказании в данном месте. Родригес-Салинас** (On various procedures for the determination of the periods of tides and their prediction at a particular place. Rodríguez-Salinas Baltasar), Rev. Real acad. cienc. exact., fís. y natur. Madrid, 1952, **46**, 441—457 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (исп.; резюме англ.)

Автор выводит предельные уравнения для приближения данной функции тригонометрической суммой с подходящими коэффициентами и частотами. Рассматриваются две задачи: минимизация суммы квадратов погрешностей данных значений и минимизация интеграла (с весом) от преобразования Лапласа этих погрешностей.

На практике эти методы встречают препятствия из-за некоторой неопределенности, связанной с кратностью допустимых частот, шума и автокорреляции в множестве данных, которые возникают в природных явлениях. A. Blake

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 1, 68.

3420. **Гармонический поверхностный анализ магнитодвижущих сил в многофазных обмотках. Кучера** (Harmonische Flächenanalyse der magnetomotorischen Kräfte in den Mehrphasenwicklungen. Kučera Jaroslav), Elektrotechnik und Maschinenbau, 1954, **71**, № 13, 321—328 (нем.)

Показывается на конкретных примерах, что при гармоническом анализе магнитодвижущих сил удобнее пользоваться комплексно-экспоненциальной формой разложения функции в ряд Фурье, чем тригонометрической формой.

Автор применяет этот метод к анализу магнитодвижущей силы: 1) при двухфазной обмотке, где в каждой фазе имеется одна катушка, так что обе катушки лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, и 2) при трехфазной обмотке, когда в каждой фазе имеется одна катушка. М. Г. Серебренников

3421. **Гармонический поверхностный анализ магнитодвижущих сил в многофазных обмотках. Кучера** (Harmonische Flächenanalyse der magnetomotorischen Kräfte in den Mehrphasenwicklungen. Kučera Jaroslav), Elektrotechnik und Maschinenbau, 1954, **71**, № 14, 351—361 (нем.)

Приводятся дальнейшие примеры гармонического анализа магнитодвижущих сил в обмотках при помощи метода, изложенного в предшествующей статье автора (см. реф. 3420), на основе применения так называемых диаграмм Гёргеса, определяющих электромагнитные свойства обмотки. Рассматриваются следующие примеры: а) случай, когда диаграмма Гёргеса представляет собой правильный многоугольник с четным числом сторон, б) случай очень большого количества пазов на полюс и фазу, в) случай наличия второй субгармонической и г) случай полюсных обмоток.

М. Г. Серебренников

3422. **Версорный анализ магнитодвижущих сил в обмотках переменного тока. Кучера** (Analysa versory magnetomotorických sil vinutí na střídavy proud. Kučera Jaroslav), Elektrotechn. obzor 1954, **43**, № 6, 285—301 (чеш.; резюме русс., франц., нем., англ.)

См. реф. 3420, 3421.

3423. **Исследование вопроса о пригодности формулы Симпсона в задачах практического гармонического анализа. Юшков П. П.,** Сб. науч. работ общетехн. и некоторых спец. кафедр (Ленингр. технол. ин-т холодильной пром-сти), 1954, **6**, 51—56

Пусть α_m, β_m — приближенные значения m-х коэффициентов Фурье, полученных для функции $f(x)$ путем приближенного интегрирования по формуле прямоугольников по $2p$ узлам (практического гармонического анализа), a_m, b_m — приближенные значения коэффициентов, полученные путем приближенного интегрирования по $2p$ узлам по формуле Симпсона.

Выводятся соотношения: $a_m = \alpha_m - {}^1/_3\,\alpha_{p-m}$; $b_m = \beta_m + {}^1/_3\,\beta_{p-m}$. Формула Симпсона дает (для гладких функций) уточнения по сравнению с формулой прямоугольников при m, малых сравнительно с p, а при m, близких к p, дает гораздо менее точный разультат, чем формула прямоугольников (так как α_{p-m} в этом случае, вообще говоря, велико по сравнению с α_m).

М. Л. Бродский

3424. **Оценка погрешности приближенных значений коэффициентов Фурье при замене заданной кривой ломаной линией или совокупностью парабол. Юшков П. П.,** Инженерный сб., 1953, **14**, 204—210

Оцениваются погрешности в определении коэффициентов Фурье, получающиеся при приближенной замене заданной периодической кривой более простыми (ломаными, параболами различных порядков).

М. Г. Серебренников

3425. **Об улучшении сходимости рядов, получающихся при уточненном гармоническом анализе. Юшков П. П.,** Инженерный сб., 1954, **19**, 171—178

Рассматривается непрерывная функция $y = f(x)$ с периодом 2π, график которой проходит через точки

$$M_l(x_l, y_l), \text{ где } x_l = 2\pi l/n,$$

$$y_l = f(2\pi l/n) \quad (l = 0, 1, \ldots, n),$$

и которая разлагается в ряд Фурье с коэффициентами A_0, A_m и B_m $(m = 1, 2, \ldots)$. Приближенная замена истинной кривой ломаной линией, проходящей через точки M_l, или совокупностью парабол второй или третьей степени позволяет находить коэффициенты Фурье a_m и b_m по-

лучающейся аппроксимирующей кусочно-полиномиальной функции $F(x)$. Числа a_m и b_m можно рассматривать как приближенные значения коэффициентов A_m и B_m. Однако непрерывная функция $F(x)$ имеет разрывы производных, и ряд Фурье для $F(x)$ сходится недостаточно быстро. Для усиления сходимости ряда Фурье для $F(x)$ используется известный метод А. Н. Крылова—выделение из $F(x)$ функции $\varphi(x)$, которая имеет те же особенности, что и сама функция $F(x)$. Дан способ нахождения функции $\varphi(x)$ (аналитически и таблично), а также получены формулы, выражающие коэффициенты Фурье функции $\psi(x) = F(x) - \varphi(x)$ через числа

$$\alpha_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos\frac{2ml\pi}{n}, \quad \beta_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin\frac{2ml\pi}{n},$$

получающиеся при обычном практическом гармоническом анализе функции $f(x)$. При этом ставится целью выразить обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ через значения y_l заданной функции $f(x)$, не разлагая в ряд Фурье функции $F(x)$. Подробно рассмотрен случай аппроксимации параболами второй степени при $n = 12$. Приведен пример. Г. С. Салехов

3426. Метод ускоренного суммирования рядов. Юс (Abridged series for numerical evaluation. Y o u s e B. K.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 3, 187 (англ.)

Рассматривается знакочередующийся ряд $a_1 - a_2 + a_3 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$, причем числа a_k стремятся к нулю монотонно убывая. Если существуют такие числа $\Delta_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$, что $a_{2n} - a_{2n+1} \geqslant \Delta_n | a_n - a_{2n+1} - a_{2n-1} |$, то $s_{2n+1} - s \geqslant \delta_n | \sigma_n - s |$, где $\delta_n \leqslant \leqslant \Delta_m$ для всех $m \geqslant n$, а $\sigma_n = s_n + (-1)^n a_{2n+1}$. Метод применим, например, к ряду $a_n = 1/n$; здесь $\delta_n = \Delta_{n+1} = n + \frac{1}{2}$ и $|\sigma_n - s| \leqslant \frac{2}{2n+1} | s_{2n+1} - s | \leqslant \leqslant \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$. М. Л. Бродский

3427. Поправка (Errata), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, **48**, № 264, 911—912 (англ.)
К РЖМат, 1954, 5785.

3428. Графическое определение коэффициентов режима работы коксовых печей. Кустов Б. И., Лгалов К. И., Сталь, 1953, № 1, 23—24

Приводятся две сетчатые номограммы для определения расчетного ($K_р$), исполнительного ($K_и$) коэффициентов равномерности выдачи кокса из печей и коэффициента равномерности среднесуточных температур контрольных вертикалов по длине батареи ($K_б$). Первая номограмма построена для формул $K_р = (n - a)/n$ и $K_и = [n - (b + a_1)]/n$; вторая номограмма построена для формулы $K_б = [2m - (a_м + a_к)]/2m$.

Величины, входящие в эти формулы, характеризуют режим работы печей. Следует отметить, что все приведенные в статье формулы допускают построение простых и удобных номограмм из выравненных точек на трех параллельных шкалах. Г. С. Хованский

3429. Номограф для расчета структурных амплитуд. Стручков Ю. Т., Ненарт Б. В., Тр. Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1954, № 9, 317—320

Предлагается усовершенствованный вариант номограммы для нахождения $\cos 2\pi hx \cos 2\pi ky$ или $\sin 2\pi hx \times \times \sin 2\pi hy$, опубликованной Н. В. Беловым (Докл. АН СССР, 1948, **59**, 487—488). Параллельные шкалы, соответствующие hx и ky, наносятся на плексигласовой доске. На средней шкале читается значение указанного выше произведения, умноженного на некоторое число, постоянное для данного атома (для хлора этот множитель 17). Дается схематический эскиз прибора и приводится таблица, пользуясь которой можно проградуировать шкалы. И. Н. Денисюк

3430. Номограмматические приемы расчетов в рентгено-структурном анализе. Белов Н. В., Тр. Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1954, № 9, 277—286

3431 Д. Применение одного численного метода анализа к расчету электрических цепей с переменными параметрами. Довгановский Н. П. Автореф. дисс. канд. техн. н., Таганрогский радиотехн. ин-т, Таганрог, 1954

3432 Д. Применения метода С. А. Чаплыгина приближенного решения операторных уравнений. Слугин С. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанский гос. ун-т, Казань, 1954

3433 Д. Метод Чаплыгина и его видоизменение для приближенного решения некоторых типов дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных). Артемов Г. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Воронежск. гос. ун-т, Воронеж, 1954

ТАБЛИЦЫ

3434. Теория телефонных реле с электромагнитным замедлением; таблица гиперболических функций. Экелёф (Theory of electromagnetically delayed telephone relays. A study of telephone relays. E k e l ö f S t i g), Ericsson Techn., 1953, **9**, № 2, 221—224 (англ.)

Таблица функций $\mathrm{ch}x$, $\frac{\mathrm{sh}x}{x}$, $A(x) = \frac{3}{x^2}\left(\mathrm{ch}x - \frac{\mathrm{sh}\,x}{x}\right)$, $B(x) = \frac{2}{x^2}(\mathrm{ch}\,x - 1)$ и $C(x) = \frac{12}{x^2}\left(\frac{\mathrm{sh}\,x}{x} - B(x)\right)$ для $x = 0\,(0{,}01)\,1{,}5$. Значения функций приведены с 4 знаками после запятой. Таблица предназначена для расчета переходных процессов в телефонных реле с электромагнитным замедлением. Г. Н. Поваров

3435. Таблицы, используемые при вычислении молекулярных интегралов. IV. Исигуро (Tables useful for the calculation of the molecular integrals. IV. I s h i g u r o E i i c h i), Natural Sci. Rept. Ochan. Univ., 1953, **4**, 64—76 (англ.)

Предыдущие части статьи см. Natural Sci. Rept Ochan. Univ., 1951, **1**, 22—28; 1951, **2**, 34—42; 1952, **3**, 53—62.

В данной части статьи приведены таблицы интеграла

$$W_\tau^\nu(m; n; \alpha, \beta) = \int_1^\infty \int_1^\infty Q_\tau^\nu(\lambda_+)\, P_\tau^\nu(\lambda_-)\, e^{-\alpha\lambda_1 - \beta\lambda_2} \times \times \lambda_1^m \lambda_2^n (\lambda_1^2 - 1)^{\nu/2} (\lambda_2^2 - 1)^{\nu/2}\, d\lambda_1\, d\lambda_2,$$

где λ_+ и λ_- суть соответственно max и min λ_1, λ_2. Значения параметров выбираются так, чтобы облегчить вычисления обменного и гибридного интегралов для молекулы Li_2 в основном состоянии. Автор надеется, что «эти таблицы послужат основанием для более полных таблиц двупараметрической функции W_τ^ν».

A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 255.

3436. Таблицы функций, встречающихся в теории дифракции электромагнитных волн вокруг Земли. Дом (Tables of functions occurring in the diffraction

of electromagnetic waves by the Earth. D o m b C.), Philos. Mag., 1953, **2**, № 5, 96—102 (англ.)
См. РЖФиз, 1955, 893.

3437 К. К вычислению таблиц логарифмов; таблицы натуральных логарифмов с 36 знаками. В а р м у с (Sur l'evaluation des tables de logarithmes et tables des logarithmes naturels a 36 decimales. W a r m u s M i e c z y s l a w, Prace Wroclawskiego Towarzystwa Naukowedo. Ser. B, № 52, s. 26 +tables s. 27-94, Wroclaw, Panstw. Wydawn. Naukowe, 1954, 8.80 zl.), Przew. bibliogr., 1954, **10**, № 30, 400 (библ.)

3438 К. Таблицы вычисления процентов умножения и деления. А с а т и а н и Л. Г., 368 стр., Госстатиздат, М., 1954, 16 р. 40 к.

3439 К. Таблица логарифмов. 11 стр., Моск. с.-х. акад. им. К. А. Тимирязева. Кафедра неорганич. химии, М., 1953, б. ц.

3440 К. Таблицы для вычисления приращений прямоугольных координат на арифмометре (с контролем). Б у л е к о в И. Ф., 187 стр., М., Геодезиздат, 1954, 6 р. 15 к.

См. также: 2989, 2995, 3028, 3190, 3195, 3214, 3222, 3234, 3256, 3272, 3353, 3372 Д

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

3441. Булева алгебра и анализ схем. Л е в и т т (Algebras de Boole e análise de circuitos. L e a v i t t M. S.), Gaz. mat., 1953, **14**, № 55, 4—7 (порт.)

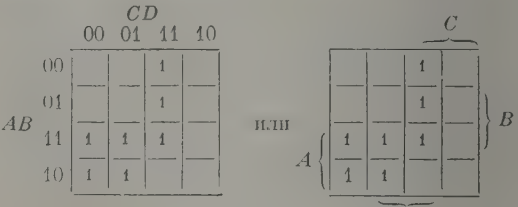
Перевод американской статьи (Leavitt M. S., Blue Print, 1952, **52**, № 5, 13, 14, 28), сделанный Рибейро (Ribeiro Maria Pilar). Дается краткий очерк булевой алгебры и ее применения к проектированию релейно-контактных схем. Во введении (§ 1) отмечается широкое внедрение в современную технику различных математических теорий, в том числе ранее принадлежавших к чистой математике. В § 2 излагаются по Шеннону (Shannon C. E., Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1938, **57**, 713—723) постулаты булевой алгебры и ее логическая интерпретация. В § 3 дается представление о схемной интерпретации булевой алгебры и об алгебраической методике упрощения схем. Приведены четыре общие формулы упрощения при наличии контактов, включенных параллельно или последовательно остальной схеме. За дальнейшими сведениями читатель отсылается к названной статье Шеннона. Отмечается, что русские исследователи значительно разработали теорию схем.

Термин «реле» переведен на португальский язык термином «электромагнит» (electro-iman). Г. Н. Поваров

3442. Карточный метод для синтеза однотактных переключательных схем. К а р н а у (The map method for synthesis of combinational logic circuits. K a r n a u g h M.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, **72**, part 1, 593—599 (англ.)

Описывается метод синтеза однотактных переключательных схем с помощью булевой алгебры. Булевы функции, изображающие условия работы схемы, записываются в виде двухступенных форм. Двухступенной формой называется сумма произведений или произведение сумм элементарных переменных. Предлагаемый карточный метод минимизации двухступенных форм представляет собой дальнейшее развитие метода Вейтча (Veitch E. W., Proc. Assoc. Comput. Mach. Pittsburgh, Pa., 1952, May 2, 3, 127—133; см. также РЖМат, 1954, 3868). Этот метод, как и метод Вейтча, использует карту с 2^n клетками при n переменных, тогда как карточный метод минимизации двухступенных форм, разработанный в Гарвардском университете (Синтез электронных вычислительных и управляющих схем, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1954, гл. V), использует карту с 2^{2n} клетками при n переменных.

В описываемом методе клеткам карты («квадратам») соответствуют комбинации значений n переменных. В квадраты вписываются значения функции. При $n = 4$ и $f = AC' + A'CD + BCD$ карта имеет вид



Квадраты, в которых стоит 1, называются p-квадратами. Множество квадратов, для которых некоторые переменные принимают фиксированные значения, называется подкубом. Подкуб, состоящий из p-квадратов, есть p-подкуб. Чтобы упростить данную двухступенную форму (например, совершенную нормальную форму), надо выбрать множество p-подкубов, покрывающее все p-квадраты, и записать сумму произведений, соответствующих этим p-подкубам. p-Подкубы выбираются так, чтобы их было возможно меньше, а их площадь была возможно больше. Двойственный аналог этого метода дает минимальное произведение сумм. С помощью карт можно сразу выносить множители за скобку в минимальных двухступенных формах и доопределять функцию минимизирующим образом на безразличных комбинациях значений аргументов. Карты можно использовать также для обнаружения несущественных переменных. Таким образом, большое число алгебраических операций заменяется непосредственным чтением карты.

Описанный карточный метод применяется в статье к релейным переключательным схемам. Указывается, что метод особенно пригоден для синтеза многовыходных схем и менее пригоден для синтеза двухполюсников. Как пример приводится контактная пересчетная схема ($n = 4$), переводящая один код в другой.

Так как при $n > 4$ разыскание подкубов на картах затруднительно, то предлагается заменять карты пространственными моделями. Описывается кубическая модель из плексигласа, имеющая 4 полки по 4×4 квадрата. Для разметки квадратов служат разноцветные фишки. Модель пригодна для $n \leqslant 6$. При $7 \leqslant n \leqslant 9$ требуется от 2 до 8 таких кубов.

В приложении к статье приводится дискуссия между проф. Колдуэллом (S. H. Caldwell) и автором.

Г. Н. Поваров

3443. Еще о схемах и логике. К р е й в е н (More about circuits and logic. C r a v e n T. L.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 317, 302—305 (англ.)

В статье развивается та же тема, что и в ранее опубликованной работе автора (РЖМат, 1953, 1027).

Вкратце излагается алгебра Буля (исчисление классов) и приводятся примеры ее применения для получения следствий из данных посылок.

Основные операции исчисления предложений, как и в предыдущей работе автора, иллюстрируются схемами, построенными из контактов реле. Кроме того, релейно-контактные схемы используются в статье для моделирования внутренней структуры предложений вида «все A суть B», «никакое A не есть B» и т. д., а также для моделирования традиционных умозаключений (силлогизмов).

Предложение «все A суть B» заменяется при этом предложением «все случаи, когда работает реле A, суть случаи, когда работает реле B». Последнее предложение описывает работу релейно-контактной схемы, изображенной на фиг. 1 статьи (буквой A здесь обозначен контакт, замыкаемый при срабатывании реле A, а замыкающий контакт в цепи, изображенной пунктиром, обозначает любую возможную контактную схему, при замыкании которой должно срабатывать реле B в тех случаях, когда реле A не работает; пунктирную цепь нельзя отбросить, ибо в противном случае получилась бы схема, моделирующая предложение «все A и только A суть B»).

В конце статьи приведены схемы, моделирующие два модуса силлогизма: «barbara» и «camestres», а также схема, моделирующая совокупность двух посылок, в которых средний термин не распределен («все Z суть Y» и «все X суть Y»). В. И. Шестаков

3444. Синтез многотактных переключательных схем. I, II. Хафман (The synthesis of sequential switching circuits. Huffman D. A.), J. Franklin Inst., 1954, **257**, № 3, 161—190; № 4, 275—303 (англ.)

Часть I содержит краткое введение в теорию релейных схем и изложение основ предлагаемого автором метода анализа и синтеза многотактных релейных схем. Часть II посвящена уточнению и развитию метода синтеза. Здесь рассматриваются, в частности, вопросы определения числа необходимых вторичных реле, построение релейных схем стандартного вида и использование изложенного метода синтеза для построения электронно-ламповых переключательных схем.

Описанный в статье метод отличается от других методов анализа и синтеза многотактных релейных схем следующими особенностями:

1. Проводимости двухполюсных контактных схем $Y_1, \ldots, Y_m, \ldots, Y_s$, присоединенных к соответствующим вторичным реле, и двухполюсных контактных схем $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots, Z_q$, присоединенных к соответствующим выходным клеммам, являются булевыми функциями $p+s$ двоичных переменных x_l и y_m ($l=1, \ldots, p$; $m=1, \ldots, s$), обозначающих проводимости замыкающих контактов реле X_l и Y_m соответственно. Эти функции записываются не посредством обычных таблиц, содержащих 2^{p+s} строк (т. е. столько строк, сколько имеется различных комбинаций значений аргументов), а посредством матриц $\|(Y_1, \ldots, Y_s)_{ji}\|$ и $\|(Z_1, \ldots, Z_q)_{ji}\|$ с размерами $2^s \times 2^p$.

2. Для характеристики устойчивости состояния реле R вводится переменная τ_R, называемая индексом перехода (transition index) и определяемая равенством $\tau_R = R \oplus r$, где $\oplus$ — знак сложения по модулю 2. Состояние реле R устойчиво, когда $\tau_R = 0$, и неустойчиво, когда $\tau_R = 1$.

Для характеристики устойчивости любого из 2^{p+s} возможных состояний релейной схемы из Y-матрицы схемы образуют τ-матрицу или матрицу переходов (transition matrix). Устойчивыми состояниями всей релейной схемы в целом являются те и только те состояния, для которых элементы $(\tau_{Y_1}, \ldots, \tau_{Y_s})_{ji}$ матрицы переходов состоят сплошь из нулей.

3. Для наглядного изображения всех возможных в рассматриваемой схеме переходов строят, используя τ-матрицу, диаграмму переходов (transition diagram). На этой диаграмме устойчивые состояния схемы изображают кружочками, неустойчивые состояния — точками, а переходы из одних состояний в другие — стрелками. Сплошными стрелками изображают единственно возможные переходы, а пунктирными стрелками — все возможные переходы из состояний, при которых оказываются неустойчивыми одновременно несколько Y-реле, т. е. когда имеют место, как говорят, «условия состязания» (race conditions) между этими реле.

4. Для анализа и синтеза релейных схем, процессы изменения состояния которых не содержат циклов и все «условия состязаний» в которых некритического типа (т. е. различные возможные процессы переходов при этих «состязаниях» приводят в результате к одному и тому же состоянию вторичных реле), применяются так называемые таблицы течения (flow table). Эти таблицы содержат 2^s строк и 2^p столбцов и составляются по следующим правилам: а) устойчивые состояния схемы нумеруются в произвольном порядке; б) неустойчивые состояния схемы обозначаются номерами тех устойчивых состояний, в которые они в конце концов переходят (при неизменных значениях переменных $x_1, \ldots, x_p$); в) устойчивые состояния отмечаются в таблице тем, что номера этих состояний обводят кружками, а номера неустойчивых состояний остаются необведенными.

Процедура анализа вкратце такова: сперва по заданной схеме составляют Y-матрицу и Z-матрицу, затем по Y-матрице строят τ-матрицу, по которой может быть построена диаграмма переходов, дающая наглядное изображение всех переходов в схеме. Если среди этих переходов не существует циклов, а «условия состязания» Y-реле могут быть некритического типа, то по τ-матрице строят таблицу течения. Эта таблица применяется затем для анализа таких процессов, в течение которых изменение переменных $x_1, \ldots, x_p$ совершается каждый раз только после того, как все Y-реле достигнут своих устойчивых состояний. Пользуясь этой таблицей, нетрудно найти по заданной последовательности состояний на входах $x_1, \ldots, x_p$ последовательность изменений состояний Y-реле и Z-выходов схемы.

Процедура синтеза релейных схем, удовлетворяющих только что указанным ограничениям, вкратце заключается в следующем.

Руководствуясь изложенными в статье правилами, составляют таблицу течения так, чтобы в ней исчерпывающе были отражены требования относительно последовательности работы всех реле синтезируемой схемы. После этого таблицу исследуют с целью возможно большего сокращения числа ее строк. Затем элементам, содержащимся в максимально сокращенной таблице течения, сопоставляют состояния Y-реле так, чтобы элементы, обозначенные в таблице одинаковыми номерами, соединялись с одноименными обведенными кружками элементами цепями соседних друг другу состояний Y-реле. При этом может оказаться необходимым пополнить таблицу добавочными элементами, не обведенными кружками, или использовать операцию расщепления строк. Далее составляют τ-матрицу так, чтобы реализовать все переходы, указанные в окончательной таблице течения. Используя равенства $Y_m = \tau_m \oplus y_m$, преобразуют затем τ-матрицу в Y-матрицу. Наконец, по заданному условию на выходе синтезируемой схемы составляют Z-матрицу. Содержащиеся в Y-матрице и Z-матрице сведения можно представить, если желатель-

но, в виде обычной таблицы, определяющей условия срабатывания Y-реле и условия проводимости двухполюсных контактных Z-схем.

В тех случаях, когда распределение состояний вторичных реле по элементам таблицы течения оказывается затруднительным произвести путем непосредственного рассмотрения этой таблицы, можно осуществить синтез схемы, используя описанную в статье методику построения схем стандартного вида. В. И. Шестаков

3445. Теоретико-функциональные методы в задачах передачи сигналов и в регулировании. Д ё р р (Funktionentheoretische Methoden bei Übertragungs- und Regelungsproblemen. D ö r r J o h a n n e s), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 8—9, 287—289 (нем.)

Синтез электрических цепей и систем автоматического регулирования приводит к следующей проблеме: построить дробно-рациональную функцию $Z(\omega)$, удовлетворяющую следующим условиям: а) $|Z(\omega)| = |Z(-\omega)|$; б) $\arg Z(\omega) = -\arg Z(-\omega)$; в) число нулей $Z(\omega)$ не больше числа полюсов; г) все полюса ее лежат в верхней полуплоскости и д) на действительной положительной полуоси функция $Z(\omega)$ мало отличается от заданной функции действительного аргумента $Z^*(\omega)$.

На примере синтеза низкочастотного фильтра, когда $Z^*(\omega) = \text{const}$ при $0 \leqslant \omega \leqslant \bar{\omega}$ и $Z^*(\omega) = 0$ при $\omega > \bar{\omega}$, показывается, каким образом к решению этой задачи могут быть привлечены теоретико-функциональные методы. Рассматриваются функции $Z_n(\omega) = (\sqrt{1-\omega^2} - i\omega)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Для аппроксимации их дробно-рациональными функциями используется интегральное представление

$$Z_n(\omega) = -\frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{U_n(\lambda)\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda - \omega}\, d\lambda,$$

где U_n определяется из $Z_n(\omega) = (-i)^n[T_n(\omega) + iU_n(\omega)\sqrt{1-\omega^2}]$ и является полиномами Чебышева второго рода.

Если контуром интегрирования служит верхняя половина единичной окружности, то разложение в ряд приводит к искомой дробно-рациональной функции

$$Z_n(\omega) \approx \frac{1}{N}(1-i)(-i)^{n+1} \times$$

$$\times \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\sqrt{\sin\varphi_\nu}\, U_n(e^{i\varphi_\nu})\, e^{i^3/_2\varphi_\nu}}{\omega - e^{i\varphi_\nu}},$$

где $\varphi_\nu = \pi(2\nu - 1)/2N$. Указывается, что приемлемое приближение получается уже при малых N.

М. А. Айзерман

3446. О периодических режимах и устойчивости релейных систем. Н е й м а р к Ю. И., Автоматика и телемеханика, 1953, **14**, № 5, 556—569
См. РЖМех, 1954, 5493.

3447. Применение преобразования Лапласа для цепи модулированной волны. В а н С ы - л э й (拉氏變換在調幅波電路中的應用.王斯雷), 新科學 (Синь кэсюэ), 1954, № 1, 64—66 (кит.)
См. РЖФиз, 1954, 13445.

3448. Об устойчивости периодических режимов в релейных системах автоматического регулирования. Ц ы п к и н Я. З., Автоматика и телемеханика, 1953, **14**, № 5, 638—646
См. РЖМех, 1954, 5492.

3449 РЖЦ. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем. А й к е н Х. Х. (ред.), М., Изд-во иностр. лит-ры, 1954 [Рецензия: П о в а р о в Г. Н., Автоматика и телемеханика, 1954, **15**, № 6, 567—569]

3450 Д. Геометрическая теория четырехполюсников. Б у р (Geometrische Vierpoltheorie. B u h r J. d e, Diss., Technische Hochschule, Darmstadt, 1954), Z. Vereines dtsch. Ingr., 1954, **96**, № 33, 1140 (библ.)

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

3451. Развитие вычислительной техники в Англии. Б р е й е р (What Britain is doing to perfect electronic office. B r a y e r H e r b e r t O.), Amer. Business, 1954, **24**, № 7, 16—19, 46, 47—48 (англ.)

В статье приводится таблица вычислительных машин, построенных в Великобритании (см. таблицу на стр. 106).

Вычислительная машина ЛЕО (РЖМат, 1955, 1514—1518), построенная фирмой «Лайонс» (Lyons), применяется для подсчета заработной платы служащих и заменяет от 200 до 400 клерков. В настоящее время машина в свободные часы сдается в аренду различным организациям. Одна из крупных английских фирм «Ферранти» (Ferranti) построила 5 больших вычислительных машин (РЖМат, 1955, 982—983, 3452), включая машину в университете в Торонто (Канада), машину в Амстердаме для фирмы «Шелл» (Shell Petroleum); три другие машины в конце 1954 г. будут доставлены в Манчестер и вычислительный центр в Риме.

В настоящий момент фирма «Ферранти» выпускает машину средних размеров, стоимостью 30 000 долл. Машина имеет запоминающее устройство на ртутных трубках (41 трубка) и магнитном барабане на 4096 кодов. В устройствах ввода и вывода используется перфолента или перфокарты. Постройкой вычислительных машин занимаются фирмы «Эллиотт» (Elliott) и «Инглиш Электрик» (English Electric Ltd.). Фирма «Эллиотт» выпускает машину «402» стоимостью 75 000 долл. и имеющую запоминающее устройство на магнитострикционных линиях задержки (никелевых) и магнитном барабане на 3000 кодов. Ввод осуществляется с перфоленты, вывод — на телетайп. Фирма «Инглиш Электрик» выпускает большую быстродействующую машину с запоминающими устройствами на ртутных трубках и магнитном барабане, на котором размещается 8192 кода. Хотя машина проектировалась для математических вычислений, она может быть использована и для коммерческих расчетов. Фирмой «Паурс-Сеймас» (Powers-Samas) выпускаются электронные перфораторы ЭМП (EMP — Electronic Multiplying Punch), широко применяемые в промышленности Англии. Модификация этой машины выпускается в США. Машина имеет 240 ламп, обрабатывает 120 перфокарт в 1 мин. Стоимость ее 15—18 тыс. долл. Фирма «Бритиш Тэбьюлейтинг Машин» (British Tabulating Mashin) выпускает электронные перфораторы, которые обрабатывают 6000 карт в 1 час при программе из 20 команд. В машине имеется 4 электронных регистра на 14 десятичных цифр и 1 на 9 цифр. Полученная в результате вычислений информация может пробиваться на любых колоннах перфокарты. Каждые три недели производится четыре таких машины, которые экспортируются. Этой фирмой в 1954 г. будет выпущено 6 машин ГЕК ПМ (HEC ПМ — см. таблицу 1), прототипом которой является машина Биркбекского колледжа АПЕ (APE).

Отмечается, что на первое июня 1954 г. в Англии не было продано ни одной малой машины (кроме электрон-

ых перфораторов) фирмам для производства деловых расчетов и работ по учету и т. п.

В заключение автор приходит к выводу, что в Англии вычислительная техника развивается слабо. Это объясняется недостаточным финансированием правительством соответствующих фирм (3 млн. долл. против 20 млн. в Америке) и боязнью многих фирм применять новое оборудование. Л. С. Легезо

3452. **Вычислительные машины в Англии. Гилл** (Computers in Great Britain. Gill Stanley), Computers and Automat., 1954, **3**, № 9, 6—8, 30 (англ.)

Обзор некоторых английских работ по цифровым машинам. Упоминается о машине АКЕ, построенной Национальной физической лабораторией (РЖМат, 1954, 2752, 3096), причем указывается, что первоначальный проект этой машины был разработан А. М. Тьюрингом (A. M. Turing), но оказался весьма громоздким и сложным для программирования, хотя и имел большую скорость работы. Машина построена по более простому проекту Хаски (H. Huskey).

Проектирование машины ЭДСАК (РЖМат, 1954, 3915К) началось в 1946 г., машина находится в действии с 1949 г. по настоящее время. Система программирования гораздо проще, но машина не обладает такой скоростью и надежностью, как АКЕ.

Первый образец Манчестерской машины построен в 1949 г. Вильямсом (Williams). В 1951 г. фирма «Ферранти» установила в Манчестерском университете промышленный образец этой машины (РЖМат, 1954, 3869). К настоящему времени «Ферранти» построила еще три таких машины: для университета в Торонто (Канада), для Министерства снабжения и для своего вычислительного бюро в Лондоне.

Отмечается, что ни одна из упомянутых выше машин не имеет встроенной операции деления; скорость работы АКЕ значительно выше, чем у упомянутых выше машин. АКЕ недавно оборудована дополнительным запоминающим устройством на магнитном барабане.

В 1947 г. фирма «Лайонс» (Lyons) начала проектирование машины для деловых расчетов. За основу была взята машина ЭДСАК. Машина этой фирмы, названная ЛЕО (LEO), вступила в действие в 1951 г.

Британская почтовая служба (British Post Office) построила для Министерства снабжения машину МОЗАИК (MOSAIC) на основе первого проекта АКЕ, предложенного Тьюрингом.

Машина типа АКЕ готовится к производству фирмой «Инглиш Электрик» (English Electric Co.).

Разработан и построен ряд малых машин. К ним относятся машины фирмы «Эллиотт» (Elliott Brothers)— «401» (РЖМат, 1953, 1435) и НИКОЛАС (NICHOLAS). В машине НИКОЛАС запоминающее устройство выполнено на магнитострикционных линиях задержки.

Организации «Royal Aircraft Establishment» (RAE) и «Atomic Energy Research Establishment» (AERE) построили машины, в которых арифметические узлы работают на декатронах (десятичные счетные лампы с холодным катодом).

Машина «AERE» имеет небольшое запоминающее устройство на декатронах и управляется командами с перфоленты.

Машина «RAE» имеет внутреннее запоминающее устройство на магнитном барабане. Числа в «RAE» представлены в системе с учетом порядков, скорость работы значительно выше, чем у машины «AERE».

Организация «Radar Research Establishment» (RRE) построила машину с параллельным электростатическим запоминающим устройством на обычных трубках. Вторая такая машина под названием МЕГ (MEG) построена в Манчестерском университете. Арифметический узел этой машины последовательного типа работает на частоте 1 *Мгц* по системе с учетом порядков. Полное время на операцию сложения 180 *мксек.*, на умножение 360 *мксек.* Система программирования МЕГ аналогична ОРАКЛЕ (РЖМат, 1954, 4936—4938).

В Кембриджском университете ведется проектирование второй (после ЭДСАК) машины. Новая машина параллельного типа, с запоминающим устройством на магнитных сердечниках и будет работать по системе с плавающей запятой. См. также реф. 3451.

Н. Я. Матюхин

3453. **Французские электронные устройства ускоряют конторские работы. Брейер** (French electronic developments help speed office systems. Brayer Herbert O.), Amer. Business, 1954, **24**, № 8, 20—23, 40—41 (англ.)

Обзор производства французских фирм, работающих в области вычислительной техники: «Булль» (Compagnie des Machines Bull), «ИБМ-Франс» (IBM France), «СЕА» (SEA — Society of Electronics and Automation). «Булль» — первая фирма в Европе, начавшая серийное производство электронных перфораторов. «Булль» выпускает также различные счетно-аналитические машины. Электронные перфораторы «Булль» типа «Гамма» («Gamma» см. РЖМат, 1954, 1839—1840) последовательного типа с регистрами на электромагнитных линиях задержки. Сложение 12-разрядных десятичных чисел производится за 170 *мксек.*, умножение с получением 23-разрядного произведения — за 20 *мсек.* Скорость подачи карт 150 шт. в 1 мин. В качестве примера указывается, что за один карточный ход может быть произведено 6 операций с учетом порядков. Особенностью машины «Гамма» является наличие двух карточных вводов. «Гамма» выпускается в различных модификациях, в основном различающихся по объему внутреннего запоминающего устройства (от 48 до 372 десятичных цифр по сравнению с 37 цифрами в ИБМ-604). Количество ламп от 350 до 400, что значительно меньше, чем у сходной американской машины ИБМ-604 (1600 ламп). Использовано большое количество германиевых диодов (около 6000 шт.). За 12 месяцев 1953—1954 г. выпущено 60 таких машин, причем к середине 1954 г. выпуск составлял 6 машин в месяц. Стоимость машин «Гамма» от 29 тыс. до 58 тыс. долл. Фирма «Булль» выпускает также электронную сортировку, обрабатывающую 700 карт в 1 мин.

Филиал фирмы ИБМ фирма «ИБМ Франс» выпускает электронные перфораторы типа 604 и 626. Последняя машина является целиком французской разработкой. Машина 626 имеет скорость в 2 раза ниже, чем у 604 (4500 карт в 1 час), но больший объем внутреннего запоминающего устройства (106 цифр). Запоминающее устройство электромеханического типа, арифметическое устройство — электронное. Две машины 626 экспортированы в Англию. Предполагается организовать производство этих машин на недавно построенном в Англии заводе английского филиала фирмы ИБМ.

Фирма «СЕА» выпустила к настоящему времени 15 крупных моделирующих устройств и цифровых машин. Разработана малая универсальная цифровая машина КАБ-2022 (САВ 2022). Машина последовательного типа с внутренним запоминающим устройством на магнитном барабане, имеющем 63 канала по 120 кодов в каждом. Код содержит 22 двоичных разряда. Разработан барабан с вдвое большим числом каналов. В устройстве ввода и вывода используется перфолента и телетайп. Предполагается добавить устройство с магнитной лентой. Имеется быстродействующее электронное печатающее устройство, в котором число в двоичном коде фотографируется на обычную кинопленку с экрана электроннолучевой трубки. Скорость вывода 12500 чисел в 1 сек. Использование двоичного кода затрудняет считывание результатов, но зато позволяет использовать эту ленту в качестве внешнего запоминаю-

Названия машины и фирмы	ЭДСАК (EDSAC) университет в Кембридже	ЛЕО (LEO) фирма «Лайонс»	АКЕ (ACE) «Инглиш Электрик»	Феррранти Марк I (Ferranti Mark I) университет в Манчестере	МОЗАИК (MOSAIC — Minister of Supplay Automatic Integrator and Calculator)	ТРЕ (TRE) Радиолокационный исследовательский институт	АМОС (AMOS — Automatic Computor Ministry of Supply) фирма «Феррранти»	НИКОЛАС (NICHOLAS) «Инглиш Электрик»	ЭЛЛИОТТ-401 фирма «Эллиот»	ГЕК II-М (ПЕС II-М) «Бритиш Тэбью — лейтинг Машин»	АПЕ (APE) «Бритиш Рэйон Рисёрч»
Год постройки	1949	1951	1951	1951	1953	1953	1953	1953	1954	1953—1954	1952
Скорость: сложение умножение время выбора	1,4 мсек 5,2 мсек 248—904 μсек	1,4 мсек 5,2 мсек 248—904 μсек	64 μсек 2 мсек 64—1000 μсек	1,2 мсек 2,16 мсек 10 μсек	0,14 мсек 5,88 мсек 1,12 мсек	40 μсек 10 мсек 5 μсек	1,2 мсек 2,16 мсек 10 μсек	6 мсек 8,16 мсек 12 мсек	204 μсек 3 мсек 13,3 мсек	5 мсек 20—600 мсек 20 мсек	5 мсек 20—60 мсек 20 мсек
Изображение чисел Количество разрядов	Двоичное 17—35	Двоичное 17—35	Двоичное 32	Двоичное 20—40	Двоичное 40	Двоичное 24	Двоичное 20—40	Двоичное 32	Двоичное 32	Двоичное 32	Двоичное 32
Входные устройства Скорость ввода	Перфолента 36 знаков в 1 мин.	Перфолента Перфокарты 28 знаков в 1 мин.	Перфокарты 1280 знаков в 1 сек.	Перфолента 200 знаков в 1 сек.	Перфокарты 1 600 знаков в 1 сек.; перфолента 4—5 кодов в 1 сек.	Перфолента 17 знаков в 1 сек.	Перфолента 20 знаков в 1 сек.	Перфолента 36 знаков в 1 сек.	Перфолента 40 знаков в 1 сек.	Перфокарты 32 знака в 1 сек.	Телетайп 7 десятичных цифр в 1 сек.
Выходные устройства Скорость вывода	Перфолента 16 знаков в 1 сек.	Перфолента Перфокарты 7 знаков в 1 сек.	Перфолента 640 знаков в 1 сек.	Перфолента 15 знаков в 1 сек.; телетайп 7 знаков в 1 сек.	Перфокарты 800 знаков в 1 сек.; телетайп 10 знаков в 1 сек.	Перфолента 10 знаков в 1 сек.; телетайп 7 знаков в 1 сек.	Перфолента 15 знаков в 1 сек.; телетайп 160 знаков в 1 сек.	Телетайп 5—6 знаков в 1 сек.	Перфолента Телетайп 10 знаков в 1 сек.	Табулятор 8 десятичных цифр в 1 сек.	Телетайп 7 десятичных цифр в 1 сек.
Запоминающие устройства:	Ртутные линии задержки 960 коротких кодов; магнитная лента	Ртутные линии задержки 2048 коротких кодов	Ртутные линии задержки 360 кодов	Электростатические трубки 512 кодов; магнитный барабан 16384 кода	Ртутные линии задержки 1036 кодов	Электростатические трубки 512 кодов; магнитный барабан 2048 кодов	Электростатические трубки 512 кодов; магнитный барабан 16384 кода	Никелевые линии задержки 1024 кода	Магнитный диск 2944 кода	Магнитный барабан 1024 кода	Магнитный барабан 512 кодов
Тип машины	Последовательная	Последовательная	Последовательная	Последовательная	Последовательная	Параллельная	Последовательная	Последовательная	Последовательная	Последовательная	Последовательная
Количество ламп	—	5000	1300	4000	6000	1950	—	500	500	—	425
Использование	Научные, инженерные, военные расчеты	Деловые, инженерные, военные расчеты	Научные, военные расчеты	Научные и деловые расчеты	Научные расчеты	Математические вычисления	Научные, инженерные, военные расчеты	Промышленные, военные расчеты	Коммерческие расчеты	Промышленные расчеты	Промышленные расчеты
Занимаемый объем	15 стоек 0,7×2,1×2,7 м	20 стоек 0,9×2,1×2,7 м	45 блоков комната 50 м²	6 стоек 1,6×0,9 м	11 стоек длиной 2,4 м	—	6 стоек 1,5×0,9 м	6 стоек длиной 2,1 м	3,6×6,3×2,4 м	2 стойки 2,1×1,2×0,3	1,8×1,2 м
Стоимость	—	450 тыс. долл.	—	—	—	—	—	—	75 тыс. долл.	50 тыс. долл.	—
Арендная плата	—	75 долл. в 1 час	—	60—120 долл. в 1 час	—	—	—	45 долл. в 1 час	—	900 долл. в месяц	—

его устройства, для чего разработан специальный читывающий прибор. Число ламп в машине около 00; широко использованы германиевые диоды. Машина вляется первым промышленным образцом, в котором спользованы печатные схемы. Стоимость ее 87 тыс. олл.

Другая машина фирмы «CEA» — «Тритолек» (Tri-olec) — предназначена для обработки сделок, заключаемых на скачках, и представляет из себя электронную ортировку-сумматор с запоминающим устройством на татических линиях (повидимому, магнитных. — *Прим. реф.*). Машина «Тритолек» может быть также спользована для механизации учета и т. п.

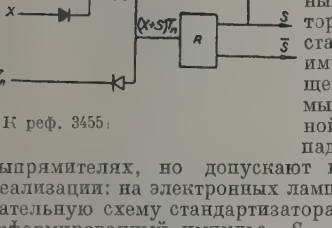
Н. Я. Матюхин

3454. Общая схема цифровой вычислительной машины. Ремон (Structure générale d'une calculatrice numérique universelle. Raymond François-Henri), Bull. Soc. franç. electriciens, 1955, ser. 7, 5, № 50, 95—108 (франц.)

Статья общего характера, в которой кратко излагается история современных вычислительных машин, их общая схема, дается понятие о программировании , в частности, о действиях над командами. Попутно казывается, что во Франции строятся автоматические ифровые машины КАБ-2022 (CAB-2022) и КЮБА CUBA — Calculatrice Universelle Binaire de l'Armement). Первая из них строится фирмой «CEA» (SEA — ociété d'Électronique et d'Automatisme), вторая устаавливается в Центральной лаборатории вооружения LCA — Laboratoire Central de l'Armement) в форте онруж в Аркёйе (Arcueil). Д. Ю. Панов

3455. Об исследовании и реализации схем совпадений. Намиан (Sur l'étude et la réalisation des circuits à coïncidence. Namian P.), Onde électr., 1954, **34**, № 323, 123—129 (франц.), 95—96 (резюме франц., англ.)

После краткого очерка применения булевой алгебры к структурному синтезу схем совпадений в импульсной технике рассматривается структурный синтез стандартизатора импульсов, восстанавливающего форму импульсов и хронирующего их при помощи схемы совпадений с обратной связью. Схемы совпадений строятся на ыпрямителях, но допускают и другие физические еализации: на электронных лампах, реле и т. д. Оконательную схему стандартизатора см. на фиг., где X — еформированный импульс, S — восстановленный имульс, T_n — хронирующий импульс, R — усилитель-нверсор. Эта схема может применяться также в кастве генератора задержек, расширителя импульсов т. д., в частности на электронных вычислительных ашинах.Сообщается, что Леклер (Leclerc) разработал ринцип построения вычислительной машины, использующей сдвиги хронирования. Как пример, иллюстрирующий гибкость и простоту хронирующих схем совадений и вместе с тем показывающий необходимость недрения булевой алгебры в проектирование схем, ассматривается структурный синтез генератора 4 двигов хронирования для электронной вычислительной машины КЮБА (CUBA) Центральной лаборатории вооружения. Период хронирования 10 μсек.; оэффициент формы 3/8; сдвиг 2,5 μсек. Синтез провоится алгебраически с помощью таблиц включений. Для упрощения структурных формул с помощью учета еиспользуемых состояний применяется исчисление мпликаций.



К реф. 3455.

В приложении 1 приводятся без доказательства основные соотношения булевой алгебры с отношением импликации, в приложении 2 — упрощение одного из уравнений генератора 4 сдвигов. В заключение автор присоединяется к призыву Леклера отказаться от заимствования англо-американских выражений и развивать самобытную французскую терминологию.

Г. Н. Поваров

3456. Ввод и использование подпрограмм на машине ФЕРУТ. Хьюм (Input and organization of subroutines for Ferut. Hume J. N. P.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 45, 30—36 (англ.)

Описывается методика использования подпрограмм и система их ввода для одноадресной цифровой электронной машины ФЕРУТ (Ferut), работающей в Вычислительном центре университета в Торонто (Канада) (РЖМат, 1953, 940; 1954, 3870).

В связи с небольшим объемом внутреннего запоминающего устройства (в. з. у.) программа для решения определенной задачи обычно делится на главную и подпрограммы, которые хранятся в магнитном запоминающем устройстве (м. з. у.) и вызываются по мере надобности во в. з. у.

Главная программа состоит из обращений к инструкциям последовательной замены подпрограмм, осуществляющим вызов подпрограмм, определение и увязку их входов и выходов. В используемой подпрограмме должна стоять группа инструкций, которая содержит передачу управления к инструкциям замены подпрограмм и необходимую информацию о следующей за ней подпрограмме.

Описывается метод выбора подпрограмм из м. з. у. (метод посредника), смысл которого определяется тем, что вместо непосредственного обращения к м. з. у. в главную программу помещается инструкция, в которой содержатся сведения о месте расположения подпрограммы на барабане. Эти инструкции расположены в стандартном участке в. з. у., что позволяет, не меняя главную программу, менять распределение подпрограмм по адресам в м. з. у. Главное в усовершенствовании системы ввода состоит в том, что на вводимой ленте пробиваются «предупреждающие» знаки (12 различных знаков), позволяющие в процессе считывания ленты обращаться к программе ввода, которая преобразует информацию, следующую за предупреждающими знаками, 12 различными способами: либо вводит в в. з. у. с ленты подпрограмму, либо переводит числа из одной системы счисления в другую, либо заменяет обращение к инструкциям, используемым в методе посредника, непосредственным обращением к барабану и т. д. После выполнения программы продолжается обычный ввод.

Приводится полный список «предупреждающих» знаков и их функций. Дается программа ввода для задачи суммирования двумерного ряда Фурье.

Описанная система ввода и использование подпрограмм позволяют: 1) вместо обращения непосредственно к магнитному барабану программировать ссылку к стандартному участку главной программы (метод посредника); 2) значительно экономить время при замене одной подпрограммы другой в процессе решения задачи; 3) с минимальной затратой труда осуществлять замену подпрограмм и числовой информации в уже готовой программе; 4) применять библиотечные ленты без изменений при решении различных задач. Подобная система была применена также в Манчестерском университете.

Л. Н. Королев

3457. Электронная вычислительная машина Манчестерского университета (El computador electrónico universal de la Universidad de Manchester), Rev. electrotechn., 1953, **39**, № 9, 372—374 (исп.)

Приведено краткое описание и характеристики электронной вычислительной машины фирмы «Ферран-

ти», разработанной Манчестерским ун-том (Англия) (см. РЖМат, 1953, 477, 938—940; 1954, 4208; 1955, 982, 983). Приводятся примеры применения машины для решения различных математических задач и проблем, связанных с промышленным производством. Указывается на возможность использования машины «Ферранти» при составлении программ для вычислительных машин. Мощность, потребляемая машиной, 27 *квт*. А. С. Федоров

3458. Математические машины (Matematické stroje), Sbor. Českosl. akad. věd. Lab. mat. strojů, 1953, № 1, 1—132 (чеш.; резюме русс., англ.)

В сборник 1 включены доклады сотрудников Лаборатории математических машин Чехословацкой академии наук, сделанные на конференции в Доме научных работников в декабре 1952 г.

В первой части сборника (гл. 1—5) дается описание логической структуры чехословацкой автоматической вычислительной машины САПО (SAPO) и методики программирования задач для этой машины. Проект машины выполнен Антонином Свободой.

В конце главы 1 приводится блок-схема вычислительной машины САПО, состоящей из арифметического устройства, управления, запоминающего устройства на 1024 слова (для чисел и команд) и устройств ввода и вывода, использующих перфокарты. Вводится символика (обозначение) команд. Команда состоит из кода операции f и пяти адресов i, j, k, r, s. Адреса i, j указывают, откуда взять два слова, над которыми производится операция, адрес k указывает, куда послать результат. В случае неотрицательного результата (содержание разряда знака «0») следующая команда выбирается из ячейки запоминающего устройства с адресом r (и $r+1$, см. дальше), а в случае отрицательного результата (содержание разряда знака «1») следующая команда выбирается из ячейки запоминающего устройства с адресом s (и $s+1$).

В главе 2 рассматриваются коды чисел и команд. Слово, хранящееся в одной ячейке запоминающего устройства, состоит из 32 двоичных разрядов. Один разряд слова служит для контроля передачи кодов в машине. Его содержание определяется так, чтобы сумма цифр кода была нечетной.

Для чисел применяются два кода: код B и код D. Код B — двоичный, с плавающей запятой. Цифровая часть X числа, представляется прямым кодом. 24 разряда отводятся на собственно цифровую часть и один разряд отводится на знак числа. Двоичный порядок P ($-31 \leqslant P \leqslant 31$) числа тоже представляется прямым кодом, состоящим из 6 двоичных разрядов. Число нуль и все числа, по модулю меньшие 2^{-32}, представляются в машине кодом, состоящим из нулей, за исключением 1 в контрольном разряде. Код D — двоично-десятичный. 6 десятичных цифр цифровой части Y числа занимают 24 двоичных разряда слова. Десятичный порядок Q числа и знак числа кодируются аналогично, как в коде B. Код B является основным, в котором производятся вычисления, код D — промежуточный, служит для ввода и вывода данных.

Код команды состоит из двух слов, каждое из которых наряду с контрольной цифрой содержит три числа A, B и C. Число A имеет 10 разрядов, число B — 9 разрядов и число C — 12 разрядов. Пара слов, образующая одну команду, находится в двух соседних ячейках, причем первая часть команды всегда имеет четный адрес. В первом слове A представляет адрес k, B — адрес r, C — часть кода операции f_1 ($IJKNDSWXYZMT$). Во втором слове A представляет адрес j, B—адрес s, C — двузначную часть кода операции f_2 (GH) и адрес i. Код операции f, состоящий из двух частей f_1 и f_2, распадается на 14 операционных знаков: $IJK \ldots H$. Существуют главные операционные знаки, имеющие самостоятельное значение, которые не могут комбинироваться между собой, и добавочные операционные знаки, которые комбинируются с главными операционными знаками.

Для числа, находящегося в ячейке запоминающего устройства с адресом i, принято обозначение $\langle i \rangle$. Если содержимое ячейки i является любой половиной команды, оно обозначается символами $!\langle i \rangle$.

Главные операционные знаки. Знаки S, N или D обозначают соответственно сложение, умножение или деление чисел $\langle i \rangle$ и $\langle j \rangle$ с округлением результата до 24 значащих цифр. Знаки ST, NT или DT обозначают те же действия, но результат не округляется (сохраняются без изменения 24 значащих цифры результата). Знак T — при $j = 0$ производится перевод числа $\langle i \rangle$, представленного кодом D, в код B, причем предполагается, что $Q = 0$; при $i = 0$ производится перевод числа $\langle j \rangle$, представленного кодом B, в код D, причем предполагается, что $0{,}1 \leqslant \langle j \rangle < 1$. Знак SX — выделяется порядок числа $\langle j \rangle$ и складывается с числом $\langle i \rangle$, результат получается в виде числа в коде B и, как во всех предыдущих случаях, направляется в адрес k. Знак WX — в числе $\langle j \rangle$ порядок (P или Q) аннулируется и замещается числом $\langle i \rangle$, а цифровая часть не меняется; полученное новое число направляется в адрес k. Знак SYZ — от кода числа $\langle j \rangle$ отделяется цифра разряда знака числа и представляется в виде числа кодом B, результат направляется в адрес k. Знак WYZ — в коде числа $\langle j \rangle$ цифра разряда знака числа аннулируется и замещается числом $\langle i \rangle$. Знаки SXY, SZ или SY — от слова $!\langle j \rangle$ отделяется соответственно число A, B или C, к нему прибавляется число $\langle i \rangle$, результат, представленный в виде числа в коде B, направляется в адрес k. Знаки $SWXY$, SWZ или SWY — соответственно к числу A, B или C слова $!\langle j \rangle$ прибавляется число $\langle i \rangle$, остальные два числа слова $!\langle j \rangle$ не изменяются, результат направляется в адрес k. Знаки WXY, WZ или WY — в слове $!\langle j \rangle$ аннулируется соответственно число A, B или C и замещается числом $\langle i \rangle$, результат направляется в адрес k.

Добавочные операционные знаки. Знак I — аннулирование знака числа $\langle i \rangle$ ($|\langle i \rangle|$). Знак J — аннулирование знака числа $\langle j \rangle$ ($|\langle j \rangle|$). Знак K — аннулирование знака результата ($|\langle k \rangle|$). Знак M — изменение знака числа $\langle i \rangle$ ($-\langle i \rangle$). При комбинации знаков I и M воспринимается $-|\langle i \rangle|$. Знак G заставляет машину прежде всего прочитать слово с перфокарты, подготовленной в вводном устройстве, и послать его в ячейку запоминающего устройства, адрес которой перфорирован на той же перфокарте. Затем выполняется операция, предписанная остающимися операционными знаками. Если подготовленная перфокарта снабжена особым отверстием, то машина считывает таким же способом и следующую перфокарту. Процесс повторяется до тех пор, пока машина не дойдет до карты без особой пометки. Знаком G можно пользоваться в сочетании со всеми главными и добавочными знаками, кроме знака H. Знак H — перфорация карты. Специальным переключателем на пульте управления задаются две возможности: $H1$ и $H2$. $H1$ — машина прежде всего перфорирует на карте слово, выбранное из ячейки запоминающего устройства, адрес которой перфорирован на той же перфокарте, подготовленной в выводном устройстве. Затем производится операция, предписанная остающимися операционными знаками. Если подготовленная перфокарта снабжена особым отверстием, то машина перфорирует таким же способом и следующую перфокарту. Этот процесс продолжается до тех пор, пока машина не дойдет до карты без особой пометки. $H2$ — перфорируется результат операции, заданной остающимися операционными знаками. Результат операции

направляется также в адрес k. Одновременно машина пробивает на карте индекс.

В главе 3 описывается процесс составления программы, состоящий из трех этапов: а) выбор подходящего численного метода; б) математическая формулировка в соответствии с избранным методом и составление программы в общем виде для решения данной задачи; в) разработка подробной программы. Исследование численных методов, подходящих для автоматической вычислительной машины, предполагается осветить в последующих выпусках сборника.

Уделяется серьезное внимание аккуратности записи и наглядности расположения материала при программировании. Составление программы в общем виде осуществляется на специальных бланках, на которых выписываются последовательно математические формулы, по которым производятся вычисления. Команды изображаются символами и обозначаются парами заглавных букв. Первая буква — общая для группы команд, выполняющих один этап вычислений, вторая буква указывает место команды в группе. Подробная программа, пригодная для кодировки, расписывается на других бланках. Адреса команд и числа записываются в восьмеричной системе. Константы размещаются в конце программы. Имеется специальная колонка, в которой дается первоначальное обозначение команд из двух букв. Содержимое рабочих ячеек отмечается обычными буквенными символами в специальной графе.

Приводится в качестве примера программа для вычисления $\cos x$ (при любом x) с помощью степенного ряда, состоящая из 28 команд и использующая 4 вспомогательные константы.

В главе 4 описывается программа для расчета оптической системы. В главе 5 рассматривается пример решения дифференциального уравнения (задача Коши) методом Рунге — Кутта. Отмечается, что этот метод является типически пригодным для автоматической вычислительной машины (в отличие, например, от метода Адамса), так как он является единым методом как в начале решения, так и при дальнейших вычислениях.

Во второй части сборника (гл. 6, 7) дается краткое описание комплекта чехословацких счетно-аналитических машин, выпускаемых народным предприятием «Аритма»: перфоратора, сортировки, табулятора и вычислительного перфоратора, выполняющего 4 арифметических действия с учетом знаков чисел. Машины работают на 90-колонных перфокартах типа «Ремингтон Ранд». Описывается методика решения математических задач на этих машинах. Приводится подробная разработка расчета профилей лопаток для турбокомпрессоров.

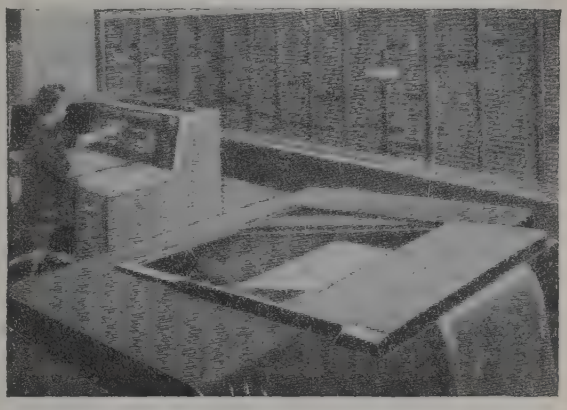
В последующих выпусках сборника предполагается освещать работу Лаборатории математических машин Чехословацкой академии наук. Е. А. Волков

3459. Новая вычислительная машина НОРК (La calculatora NORC de la International Business Machiness Corp.), Calculo Automat. y Cibernet., 1955, 4, № 9, 43—55 (исп.)

Новая цифровая вычислительная машина НОРК (NORC — Naval Ordnance Research Calculator) была пущена 2 декабря 1954 г. Машина предназначена для решения проблем военно-морской техники, например задачи о быстром движении тела под водой. Машина построена фирмой ИБМ по заказу Военно-морского министерства США и характеризуется высокой скоростью счета: умножение 13-значных чисел выполняется за 31 μсек, сложение или вычитание — за 15 μсек. Ввод данных осуществляется с магнитной ленты. Данные на магнитную ленту записываются с перфокарт в отдельном устройстве. Система счисления десятичная, количество разрядов 16 и разряд знака, количество адресов 3. Внешнее запоминающее устройство на магнитных лентах: количество устройств 8, плотность записи 201 знак на 1 *см*, скорость движения ленты 355,6 см/сек, скорость ввода данных 70 000 десятичных цифр в 1 сек, скорость пуска 0,008 сек. Внутреннее электростатическое запоминающее устройство емкостью 2000 цифр, время выборки 8 μсек. Положение десятичной запятой определяется автоматически, а также может быть зафиксировано, скорость умножения 31 μсек, скорость сложения 15 μсек, скорость полных операций, включая операции с запятой, 15 000 в 1 сек. Устройство вывода: количество печатающих устройств 2, скорость печати 18 000 знаков в 1 мин., во время печатания скорость счета машины уменьшается не более чем на 3%.

Машина установлена в вычислительном центре на Военно-морском полигоне в г. Далгрен, шт. Виргиния.

3460. Новая цифровая вычислительная машина военно-морских сил США НОРК является лучшей в мире (NORC Navy's new'brain' is world's smartest), Air Force Times, 1954, 15, № 18, 1 (англ.)



К реф. 3460

Краткое сообщение о завершении фирмой ИБМ постройки новой цифровой вычислительной машины НОРК (NORC) (см. реф. 3459). Приводится фотография общего вида машины (см. фото). С. Е. Жорно

3461. Инженеры делают более совершенной исследовательскую вычислительную машину (Engineers humanize research computer), Electronics, 1955, 28, № 1, 8 (англ.)

См. реф. 3459, 3460.

3462. Электронное вычислительное устройство, использующее быстродействующие безламповые схемы (Electronic «brain» to use speedy tubeless circuits), Sci. News Letter, 1955, 67, № 14, 216 (англ.)

Краткое сообщение о выполненном на полупроводниковых триодах миниатюрном вычислительном устройстве ТРАНЗАК (TRANSAC — Transistor Automatic Computer) фирмы «Филко» (Philco Research and Engineering Laboratories, Philadelphia). ТРАНЗАК предназначается для установки на реактивных самолетах и управляемых снарядах. Фирма считает, что арифметическое устройство такого типа сможет выполнять до 600000 сложений в 1 сек.

В машине применена непосредственная связь контуров, что позволяет увеличить скорость работы в 10 раз по сравнению с другими безламповыми вычислительными машинами. Все элементы арифметического устройства и устройства управления сведены в сменные блоки — «карты». Монтаж элементов на картах выполнен методом печатных схем с использованием только полу-

проводниковых триодов и сопротивлений. Применение полупроводниковых триодов позволило уменьшить габариты, вес и стоимость машины в 3 раза по сравнению с существующими безламповыми машинами. Машина ТРАНЗАК гораздо компактнее, чем вычислительные машины на электронных лампах, и потребляет в 1000 раз меньше электроэнергии.

Фирма считает, что «феноменальная» скорость машины будет «достаточна для всех военных применений в обозримом будущем», и указывает, что теперь становится возможным создание простых цифровых вычислительных машин, малых по размерам, потребляющих мало энергии и работающих с высокими скоростями. Отмечается, что использование непосредственной связи контуров позволяет наладить массовое производство таких машин.

Фирма предсказывает применение контуров с непосредственной связью также в промышленных устройствах управления и в быстродействующих переключающих схемах с малым потреблением энергии. Г. С.

3463. Десятичная вычислительная машина (Decimal computer), Prod. Engng, 1953, **24**, № 11, 202 (англ.)

Сообщение фирмы «Компьютер Рисёрч» (Computer Research) о выпуске новой модели цифровой машины для решения дифференциальных уравнений CRC 105 (CRC 105 Decimal Digital Differential Analyzer).

Каждый из 60 интеграторов имеет 6 значащих цифр и знак. Машина выполняет 3600 интегрирований в 1 сек. Одновременно можно решать до 20 задач. В качестве запоминающего устройства используется магнитный барабан со скоростью вращения 3450 об/мин. Любой из интеграторов может получить информацию из другого интегратора, от внешнего источника (из другой вычислительной машины, перфоленты, преобразователя непрерывных данных в цифровые и т. п.). Машина имеет 400 ламп.

Основная стойка машины имеет размеры 96×180×225 *см*. Компания строит 5 CRC 105 для правительства США. См. также РЖМат, 1953, 488; 1954, 3484.

Л. С. Легезо

3464. Цифровые машины в технике энергетических систем. Траджен (Digital computers in power system engineering. Trudgen W. D.), Electric Light and Power, 1954, **32**, № 11, 81—85 (англ.)

Популярное описание принципов работы цифровых машин и примеры использования их для расчетов в области энергетики (расчет теплового баланса турбин, расчет паропровода, градуировка термометра сопротивления).

Даны основные характеристики машины ЮДЕК (объем запоминающего устройства 5300 9-значных десятичных чисел, скорость 59 операций сложения и 20 операций умножения в 1 сек.; РЖМат, 1955, 2434) и машины ИБМ-604 (РЖМат, 1953, 1439).

Б. А. Бабаян

3465. Составление платежных ведомостей с помощью вычислительной машины ЭЛЕКОМ-120. Шоу (Payroll accounting with Elecom 120 computer. Shaw Robert F.), Proc. Western Computer Conf. (Febr. 1953), New York, 1953, 54—64 (англ.)

Даются краткие сведения о машине ЭЛЕКОМ-120 (Elecom 120), которая является цифровой параллельной одноадресной машиной с внутренним запоминающим устройством на магнитном барабане объемом 1000 кодов. Числа представляются по десятичной системе. Запятая фиксированная. Машина предназначена для коммерческих расчетов. Составление платежной ведомости на 4000 рабочих на машине занимает 35 час. Номер рабочего, состоящий из 8 десятичных цифр, и число часов, проработанных им нормально и сверхурочно, вводятся в машину с перфоленты. С магнитной ленты вводятся номер рабочего, имя рабочего, его адрес, вид налогов, удержаний и т. д. Для этой цели на ленте отводится блок в 50 восьмиразрядных кодов. Результаты вычислений печатаются в виде ведомости буквопечатающим аппаратом. Составление недельной расчетной ведомости на одного рабочего требует 27 сек., из них на ввод с перфоленты идет 2 сек, на ввод с магнитной ленты 3,2 сек., на вычисления 5 сек., и на печать 17 сек.

В статье приводится блок-схема программы для расчета зарплаты, описывается ход вычислений и виды контроля правильности ввода с магнитной ленты и записи на магнитную ленту.

Л. Н. Королев

3466. Вычислительные машины и запоминающие устройства (Computers and memories), Electr. Engng, 1954, **73**, № 1, 14—15 (англ.)

Приводятся фотографии отдельных вычислительных машин и запоминающих устройств, в частности наладка запоминающего устройства машины Райдак (Raydac) на магнитных лентах, запоминающее устройство на магнитном барабане машины СВАК (SWAC) и др.

А. Б. Залкинд

3467. Конференция по автоматическим цифровым вычислениям (Symposium on automatic digital computation), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, **7**, № 43, 205—206 (англ.)

Сообщение о конференции по автоматическим цифровым вычислениям, происходившей 20—25 марта 1953 г. в Национальной физической лаборатории в Теддингтоне (Англия). Участникам конференции демонстрировалась цифровая вычислительная машина, разработанная в Национальной физической лаборатории. Приводится полный список докладов с указанием авторов и организаций (РЖМат, 1954, 3491).

М. П. Сычева

3468. Британская ассоциация.— Электронные вычислительные машины (The British Association.— Electronic computers), Engineer, 1953, **196**, № 5094, 332—333 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5879. Сообщаются ответы докладчиков на некоторые заданные им вопросы, в частности о составлении программ самими машинами. Оба докладчика сомневаются в возможности успешно решить задачу о построении программ для автоматического программирования, однако отмечают наличие различных мнений по этому вопросу. Было указано также, что коммерческая цена пользования машинами (как Манчестерского университета, так и АКЕ) составляет 20 фунтов стерлингов в час.

К. А. Семендяев

3469. Дискуссия на симпозиуме по цифровым вычислительным машинам 14 апреля 1953 (Discussion on the symposium of papers on digital computers (14th april, 1953)), Proc. Instn. Electr. Engrs, 1953, **100**, part II, № 77, 540—543 (англ.)

В дискуссии по докладам о Манчестерской вычислительной машине (РЖМат, 1954, 4208; 1955, 982, 983) отмечается ряд ее достоинств: 1) надежность и возможность использования для решения задач 70% рабочего времени, что является следствием хорошо поставленной профилактики; 2) малое время на производство операции умножения, сравнимое с временем производства операции сложения; 3) введение В-трубки, что значительно ускоряет решение ряда задач; 4) большое вспомогательное запоминающее устройство на магнитном барабане с автоматическим обменом с главным запоминающим устройством; 5) широкое использование в машине электроннолучевых трубок, как в главном запоминающем устройстве, так и во вспомогательных блоках, что позволяет накопить значительный опыт эксплуатации электроннолучевых трубок в вычислительных машинах и использовать его при постройке быстродействующих машин.

Указано, что в AERE (Atomic Energy Research Establishment) более года работает малая десятичная машина.

Сообщается, что цифровая вычислительная машина ТРИ (TRE) имеет запоминающее устройство на электронно-лучевых трубках VCR 266 параллельного типа с объемом в 512 двоичных чисел по 24 разряда. Коэффициент допустимого числа обращений 512.

Т. М. Александриди

3470. **Конференция по вычислительным машинам** (Computer men meet), Midwest Engr, 1953, **6**, № 4, 28 (англ.)

Сообщение о конференции по автоматическим цифровым машинам, созванной в начале августа 1953 г. Аргонской национальной лабораторией совместно с лабораторией в Ок Ридже (Oak Ridge), на которой присутствовало 165 человек. В. Н. Аверин

3471. **Проблемы развития больших вычислительных машин. Кремер** (Entwicklungsprobleme der Großrechenanlagen. Vom Aachener Kolloquium über programmgesteuerte Rechengeräte und Integrieranlagen. Cremer Hubert), Math.-phys. Semesterber., 1953, **3**, № 1—2, 122—129 (нем.)

Сообщение о коллоквиуме, посвященном проблемам развития современных математических машин, который состоялся в июле 1952 г. в Аахене. Отмечается, что это было первое совещание такого рода в Германии. На нем присутствовало около 400 представителей высших учебных заведений, научно-исследовательских организаций, промышленности. Автор констатирует, что и в Германии стремительно развиваются математические машины с программным управлением; уже изготовляются сравнительно недорогие машины (стоимостью до 100 000 марок).

На заседании выступило пять докладчиков.

Д-р Бюкнер (H. Bückner)— доцент в Берлине и главный математик фирмы «Шоппе и Фезер» (Schoppe und Faeser) в Миндене — сообщил о конструируемой им машине «Интегромат» (Integromat), в которой интеграторы непрерывного действия заменены «ступенчатыми интеграторами»; множительные устройства устраняются заменой умножения интегрированием по Стилтьесу. В простой задаче интегральная кривая чертится за 2 мин., в сложной—за 5—10 мин.; точность около 1%.

Эта машина занимает некоторое промежуточное положение между двумя основными типами машин. Она не является машиной непрерывного действия, но в то же время ее нельзя отнести и к цифровым машинам, хотя она и управляется при помощи программы. Указывается, что время подготовки к работе будет меньше, чем у обычных цифровых машин. Стоимость машины будет около 60 000 марок.

Проф. Вальтер (A. Walter) подчеркнул революционизирующее значение машин в развитии и внедрении в практику численных расчетов. По его мнению, в дальнейшем также будут необходимы оба типа машин — и цифровые, и непрерывного действия, а также промежуточного типа, как «Интегромат». Он считает, что цифровые, машины должны применяться и там, где исходные данные и результат даются графически, что важно для инженеров, указывает на опасность слишком сильного увлечения машинами, подчеркивает необходимость согласованного развития и машин, и методов.

Д-р Вейль (F. J. Weyl) сделал обзор важнейших американских машин и круг их задач, отметил проблему надежности эксплуатации, вопрос осуществления метода Монте-Карло на современных машинах.

Проф. Бирман (L. Biermann) (Гёттинген) сообщил о разработке электронных вычислительных машин G1 и G2 (РЖМат, 1954, 1432—1434).

Инж. Цузе (K. Zuse) сделал доклад на тему «О программируемых вычислительных устройствах для промышленного применения»; дал обзор текущей работы в его фирме. После войны была поставлена задача постройки надежных устройств для практического применения. Устройства — электромеханические; применение этих устройств хотя и дает меньшую скорость, но более надежно. Упоминается машина такого типа, находящаяся в Цюрихе, которая работает по 10 час. без всякого присмотра. Строится новое устройство для фирмы Leitz.

Н. П. Трифонов

3472. **Новая немецкая вычислительная машина** (Neue deutsche Rechenmaschine), Naturwiss. Rundschau, 1954, **7**, № 5, 206—207 (нем.)

Сообщение о постройке обществом «Макса Планка» (Max-Planck-Gesellschaft) по заказу Гёттингенского института физики М. Планка (проф. Хейзенберга) новой быстродействующей вычислительной машины G3, предназначенной для проведения сложных расчетов по атомной физике и аэродинамике. Указывается, что новая немецкая цифровая машина G3 через 2—3 года вступит в строй, значительно превзойдет в быстродействии (10 тыс. операций в 1 сек.) более ранние вычислительные машины G1 и G2 и будет самой большой немецкой вычислительной машиной.

Отмечается, что благодаря надежному запоминающему устройству G3 в быстродействии и универсальности не будет уступать лучшим американским цифровым машинам. Г. М. Грязнов

3473. **Электронная вычислительная машина для решения дифференциальных и интегральных уравнений. Уолман** (An electronic computing machine for the solution of differential and integral equations. Wallman Henry), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 389—390 (англ.)

Сообщение об электронной вычислительной машине ЭИДА (EIDA — Electronic Integral and Differential Analyzer) для решения дифференциальных и интегральных уравнений, построенной Технологическим университетом Чалмерса, Швеция (Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden). Машина решает обыкновенное дифференциальное уравнение порядка выше восьмого (линейное или нелинейное, с постоянными или переменными коэффициентами) за 0,01 сек. Машина может решать также некоторые дифференциальные уравнения в частных производных по двум независимым переменным гиперболического и параболического типов и решать итерационным методом некоторые интегральные уравнения. Л. А. Плинер

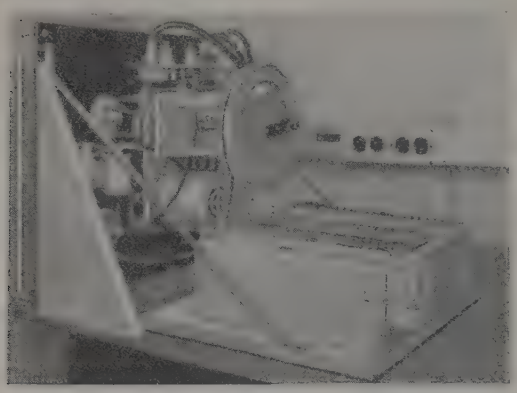
3474. **Коррелятограф. Машина для непрерывного показа корреляции за короткий отрезок времени. Беннетт** (The correlatograph. A machine for continuous display of short term correlation. Bennett W. R.), Bell System Techn. J., 1953, **32**, № 5, 1173—1185 (англ.)

Описывается прибор, позволяющий производить приближенное вычисление корреляционной функции вида $\psi_{1,2}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t)\, f_2(t-\tau)\, dt$ с последующим нанесением результатов вычисления на бумажную ленту. Величина функции определяет интенсивность метки на ленте (малым значениям соответствуют более светлые, большим — более темные метки). Анализируемая функция записывается предварительно на магнитную пленку, которая затем медленно протягивается над вращающейся магнитной головкой ($n = 60$ об/сек).

Напряжение, полученное с магнитной головки, затем усиливается и подается на линию задержки с 200 отводами, соединенными с контактами переключателя, вращающегося со скоростью 30 об/мин.

С выхода переключателя через электронный ключ и усилитель напряжение подводится к множителю на германиевых варисторах. Множитель производит перемножение этого напряжения на напряжение, получен-

ное с выхода магнитной головки, или на другое напряжение. Произведение затем интегрируется и через



К реф. 3474

сравнивающее устройство, модулятор и усилитель подается на привод пера самописца.

В статье приводятся принципиальная и кинематическая схемы прибора, общий вид конструкции (см. фото) и три «коррелятограммы», позволяющие сделать качественные суждения о результатах корреляции. Практически на коррелятограммах можно только очень приближенно видеть, когда функция $\psi(\tau)$ меняет знак. Н. В. Корольков

3475. Простой прибор для автоматического вычерчивания функций корреляции. Шулл (A simple computer for automatically plotting correlation functions. Schooley Allen H.), Convent. Rec. I. R. E., 1953, part 7, 43—47 (англ.)

Электромеханический прибор для вычисления взаимной или автокорреляционной функции. См. РЖМат, 1954, 2384.

3476. Моделирующее вычислительное устройство (Analog computer), Aero Digest, 1953, **67**, № 4, 124 (англ.)

Сообщение фирмы «Гудиир Эркрафт» (Goodyear Aircraft Corp.) о выпуске нового моделирующего вычислительного устройства ГЕДА N3 (GEDA GN215N3). Устройство может быть использовано самостоятельно либо в комбинации с другими моделирующими вычислительными устройствами для решения линейных и нелинейных задач, вычисления различных функций, умножения, сложения. Модель N3 состоит из блока управления, блока питания, соединительной коробки и 10 усилителей. Панель управления расположена в верхней части стойки. На ней находятся ключ включения, вольтметры, индикатор нуля, индикаторы перегрузки каждого усилителя и главный индикатор перегрузки. Модель ГЕДА N3 проектировалась для совместной работы с моделирующим устройством ГЕДА L3 той же фирмы (GEDA GN215L3), хотя она может решать самостоятельно большой круг задач.

Л. С. Легезо

3477. Моделирующее вычислительное устройство (Analog computer), Aero Digest, 1953, **67**, № 4, 132 (англ.)

Сообщение фирмы «Гудиир Эркрафт» (Goodyear Aircraft Corp.) о выпуске специального устройства, могущего служить для ввода и вывода данных в моделирующие вычислительные устройства. Устройство вводит либо выводит одну переменную величину как функцию другой переменной величины. При работе устройства в качестве входного функция $y=f(x)$ записывается специальными проводящими чернилами на бумажной ленте. Чувствительный элемент, автоматически следующий вдоль кривой, снимает соответствующее напряжение и подает его на вход моделирующего устройства. При работе устройства в качестве выходного записывающее перо, скользящее по вращающемуся барабану в соответствии с поданным от моделирующего устройства напряжением, наносит на бумагу кривую $y=f(x)$, причем эта кривая может быть немедленно по мере ее вычерчивания считана и подана обратно в машину. В этом случае максимальное перемещение барабана составляет 25 *см* при скорости вращения 25 *см/сек*. Максимальное поперечное перемещение записывающего пера составляет 19 *см* при максимальной скорости перемещения около 18 *см/сек*. Масштабные коэффициенты могут принимать значения: 4; 2; 0,4; 0,2; 0,04 *в/см* и 20; 4; 2; 0,4; 0,2 *мв/см*. При использовании устройства в качестве входного его выходное напряжение меняется от 0 до 75 *в* и масштабный коэффициент составляет 4 *в/см*. Выходное напряжение получается с точностью до 0,7 *в*, если смещение чувствительного элемента по отношению к кривой не превышает 13 *мм*. Устройство потребляет мощность 200 *вт*. Л. С. Легезо

3478. Устранение гармоник от источника решающего напряжения в счетно-решающих устройствах непрерывного действия на следящих системах. Олман (Harmonic cancellation from computing voltage source in servo analogue computers. Alman James), Electr. Engng, 1954, **73**, № 8, 711—713 (англ.)

Описывается метод улучшения работы следящих систем для случаев, когда источник питания выдает решающее напряжение с гармониками. Сущность метода состоит в подаче на суммирующую цепь решающего элемента дополнительного решающего напряжения, сдвинутого по фазе на $+90°$ или $-90°$ в зависимости от частотной характеристики решающей цепи.

Автор отмечает, что этот метод справедлив только при очень малых фазовых смещениях на рассматриваемых частотах. П. В. Тихонов

3479. Интегрирующий мотор (Integrating motor), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 11, 1082 (англ.)

Сообщение фирмы «Саммерс Гироскоп» (Summers Gyroscope Co.) о разработке нового высокочувствительного интегрирующего мотора для использования в приборах управления снарядами и автопилотах. Основные данные этого мотора таковы: 1) постоянная времени разгона 0,003 сек., 2) отношение движущего момента к моменту инерции 10^4—10^6 $\left[\frac{1}{сек^2}\right]$, 3) вес 626 *г*, 4) габаритные размеры: длина 85 *мм* при диаметре 63 *мм*, 5) чувствительность по мощности 0,1 *мкт*, по току 0,02 *ма*, 6) минимальное напряжение трогания 0,005 *в*. Мотор снабжен прецизионным редуктором и 5-*вт* потенциометром. Приводится фото общего вида.

Б. Я. Коган

3480. Недорогое точное электронное множительное устройство с широким динамическим диапазоном. Милс (An accurate, inexpensive, electronic multiplier with wide dynamic range. Mills Robert L.), J. Acoust. Soc. Amer., 1953, **25**, № 4, 820 (англ.)

Для перемножения двух переменных напряжений, являющихся сложными функциями времени, предлагается устройство, состоящее из простой балансной диодной мостовой цепи и выходного фильтра. На вход цепи подаются напряжения, получающиеся в результате сложения напряжения пилообразной формы с суммой и с разностью входных напряжений, подлежащих перемножению. Принцип работы такого множительного устройства совмещает характерные особенности время импульс-

ых множительных устройств и устройств, выполняющих умножение по формуле $U_x \cdot U_y = [(U_x + U_y)^2 - (U_x - U_y)^2] / 4$. Погрешность выполнения операции множения менее 1% при динамическом диапазоне 00 : 1. Отношение амплитуд сигнала к помехе на выоде имеет порядок 30 : 1. Описанное устройство может ыть использовано при построении корреляторов и неинейных моделирующих устройств. Б. Я. Коган

3481. Использование криволинейных характеристик для выполнения вычислений в электронных машинах. **Харму т** (Die Ausnützung gekrümmter Kennlinien für die h ̈heren Grundrechnungsarten in elektronischen Rechenmaschinen. Harmuth Henning), Acta phys. austriaca, 1954, 8, № 4, 332—337 (нем.)

Указывается, что по сравнению со сложением и вычитанием реализация в моделирующих устройствах действий умножения и деления представляет большие затруднения. Предлагается схема для возведения в квадрат, основанная на использовании нелинейности веточных характеристик триодов. Показывается, что с помощью полученного устройства легко осуществляются схемы, выполняющие также действия умножения, деления и извлечения корня.

Погрешность работы подобных устройств зависит в основном от качества применяемых ламп, разброса их характеристик и составляет в среднем несколько процентов. Г. М. Грязнов

3482. Новая вычислительная установка, работающая по методу геометрического подобия. Кулен кампи (Eine neue Rechenanlage nach dem Verfahren der geometrischen Nachbildung. Kuhlenkamp A.), Feinwerktechnik, 1953, 57, № 9, 292—294 (нем.)

Описывается машина непрерывного действия для решения дифференциальных уравнений, состоящая из 10 фрикционных интеграторов, 12 сумматоров, 12 передаточных устройств и 4 функциональных устройств (досок) для ввода и записи функций, законченная постройкой в Австралии в 1951 г.

Устройство отличается от уже известных машин этого типа применением фрикционного интегратора с двумя парами, один из которых соприкасается с диском, а второй — с интегрирующим цилиндром. Независимая переменная и подинтегральная функция устанавливаются с помощью электродвигателей, на валу которых имеются датчики, фиксирующие угловое перемещение вала. Датчиком является двигатель с шаговым включением (на 24 шага). Двигатели коммутируются с датчиками в соответствии со схемой решения уравнения на распределительной доске. Двигатели соединены с входными валами интегратора x и y при помощи понижающих скорость редукторов, с постоянным и переменным передаточным коэффициентом. Благодаря этому постоянная k в выражении интеграла $S = \frac{1}{k} \int ydx$ может принимать значения от 12,5 до 5000.

Независимое переменное x, определяющее скорость вращения диска, удерживается на заданном уровне с помощью так называемого привода стабильной скорости. Напряжение тахогенератора на валу двигателя сравнивается с напряжением потенциометра, задающего скорость, и разность этих напряжений через усилитель управляет двигателем, сохраняющим стабильную скорость. Скорость регулируется в пределах от 0 до 6000 об/мин.

Ошибка интегрирования в каждом интеграторе порядка 0,1%. Общая же ошибка решения дифференциального уравнения составляет в среднем 1—2%. В качестве примера приводится решение дифференциального уравнения движения поезда. Ф. В. Майоров

3483. Новая немецкая установка для интегрирования дифференциальных уравнений. **Вальтер** (Neue deutsche Integrieranlage für Differentialgleichungen. Walther A.), Z. Vereines dtsch. Ingr., 1954, 96, № 22, 755—758 (нем.)

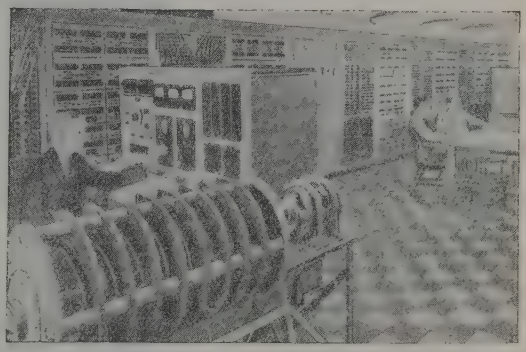
Сообщается об электромеханическом моделирующем устройстве, построенном фирмой «Шоппе и Фезер» (Schoppe & Faeser) и переданном в июне 1954 г. Институту прикладной математики Боннского университета.

Установка для решения дифференциальных уравнений состоит из 8 интеграторов, 12 сумматоров, 4 простых и 2 двойных (позволяющих учитывать времена запаздывания) функциональных столов, оборудованных фотоэлектрическими следящими системами. Машина не имеет множительного устройства. Для перемножения величин пользуются различными искусственными способами, например, интегрированием Стилтьеса. Задание коэффициентов производится с тремя верными знаками. Точность работы отдельных элементов установки выше 1%. Запись результата решения на лист бумаги формата А2 продолжается примерно четверть часа. Стоимость установки около 700 тыс. марок. Г. М. Грязнов

3484. Автоматическое решение механических проблем. **Хардер** (Automatic solution of mechanical problems. Harder E. L.), Digital and Analog Computers and Computing Methods. Symposium at the 18-th Appl. Mech. Div. Conf. of the Asme, Univ. Minnesota, June 18—20, 1953, New York, 1953, 47—64 (англ.)

Статья обзорного характера. Изложены принципы построения современных счетных машин и их конструкции.

На примерах динамического расчета многоопорного вала, лопасти турбины и парового трубопровода показаны возможности применения моделирующих устройств и различных типов цифровых машин. Отмечаются особенности методов решения на каждом типе машин, трудоемкость и точность решений.



К реф. 3484

Приведена фотография большого моделирующего устройства общего назначения АНАКОМ (ANACOM) (см. фото). Устройство имеет сотни пассивных элементов и десятки решающих усилителей. Конструкция дает возможность одновременного решения пяти самостоятельных задач. П. В. Тихонов

3485. Оценка моделирующих устройств и цифровых вычислительных машин (An evaluation of analog and digital computers), Proc. Western Computer Conf. (Febr. 1953), New York, 1953, 19 — 48 (англ.)

Отчет о третьем заседании Западной конференции по вычислительным машинам (февраль 1953 г.), на котором были сделаны четыре сообщения и проведено обсуждение вопроса о достоинствах и недостатках моделирующих устройств и цифровых вычислительных машин.

Ввиду того, что моделирующее устройство само является моделью физической задачи, применение моделирующего устройства имеет преимущество при решении простых задач, так как сложность цифровой вычислительной машины оправдывается лишь при решении действительно сложных проблем.

Отмечается, что во многих случаях важно, чтобы вычислительное устройство могло работать в истинном масштабе времени.

Ввиду малой скорости цифровые машины могут сейчас решать задачу в истинном масштабе времени лишь в случае простых задач. (Необходимо иметь в виду, что указанные в отчете точки зрения относятся к началу 1953 г. С тех пор опубликован ряд сообщений об успехах в построении цифровых вычислительных устройств, работающих в истинном масштабе времени (РЖМат, 1954, 4618; 1955, 887 и др.), цифровых автопилотов (РЖМат, 1955, 2042) и т. п. *Прим. ред.*).

В настоящее время для цифровых вычислительных машин не имеется достаточного количества удобных типов входных и выходных устройств. Работа над этими устройствами, повидимому, приведет к созданию сложных систем типа: моделирующее устройство на входе — цифровая вычислительная машина — моделирующее устройство на выходе.

Дается общая оценка основных процессов в вычислительной машине как при подготовке задачи, так и при ее решении. Указывается, что появилась необходимость в разработке программ для операций над программами (a process for operating on a process). Переходным этапом к этому является развитие машинной логики. Указывается на необходимость введения большего числа логических операций в цифровых машинах с целью [illegible] логических процессов, позволяющих автоматически выбрать наиболее быстрый и экономный путь решения поставленной задачи, и рассматриваются примеры. К упрощению логики и экономичности приведет применение машины в [illegible] области. Указывается, что в ближайшее время появится возможность создания машин специального назначения.

С [illegible] г. область управления с помощью цифровых машин стала отделяться от области собственно вычислений. Начата разработка нового процесса в цифровых управляющих машинах: «работа без использования чисел».

Дается краткий обзор применения вычислительных машин в авиации, приведших к созданию автоматических систем управления самолетом. Описаны этапы создания автопилота как части общей системы управления самолетом.

Задача отработки функций нескольких переменных является трудной задачей как для цифровых вычислительных машин, так и для моделирующих устройств. Сообщается, что в Массачусетском технологическом институте в июне 1953 г. должно быть смонтировано четыре устройства для отработки функций двух переменных с точностью приблизительно 0,25%. В. П. Разро

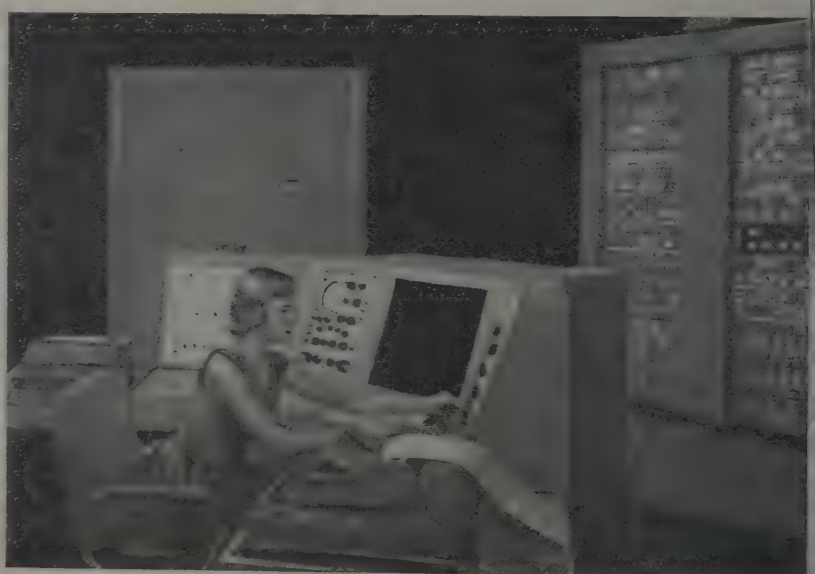
3486. Достижения радиотехники за 1953 г. (Radio progress during 1953), Proc. I. R. E., 1954, **42**, № 5, 705—759 (англ.)

Подробный обзор литературы за 1953 г. по вопросам радиотехники и смежных областей.

В разделе «Электронные вычислительные машины» отмечается, что в 1953 г. были выпущены цифровые вычислительные машины ИБМ-701 и ИРА-1103. В течение года в различных учреждениях было установлено несколько машин УНИВАК, имеющих 3 усовершенствования: устройство для перенесения данных с перфокарт на перфоленту, устройство для печати данных с магнитной ленты, новый перфоратор для ленты, который проще первоначальной модели.

Фирмой «ИБМ» была выпущена средняя машина ИБМ-650 с запоминающим устройством на магнитном барабане (РЖМат, 1954, 4618; 1955, 2441). Для записи на барабан используется специальный пятиимпульсный код, в других каналах машины используется двоично-пятеричный код. Выпущено много других малых вычислительных машин: МОНРОБОТ (MONROBOT), КАДАК (CADAC), ЭЛЕКОМ-100 (ELECOM 100), МИНИАК (MINIAC), машина типа 30—201, «Круг» (РЖМат, 1955, 1981).

Фирма «Ремингтон Ранд» выпустила малую коммерческую машину 409-2 (РЖМат, 1954, 2747), имеющую 1467 электронных ламп и 1128 газополных диодов, специально выпущенных для использования в этой машине. Арифметическое устройство машины состоит



Фиг. 1

из 22 параллельных регистров, собранных на двоично-пятеричных декадных счетчиках. Машина может выполнять программу из 140 шагов по 520 μсек. каждый шаг.

Правительственными лабораториями и учреждениями

выпущены машины ФЛАК (FLAC) и МИДАК (MIDAC), прототипом которых является СЕАК. Машина ФЛАК (см. фиг. 1) является последовательной двоичной машиной, работающей на частоте 1 *Мгц*. Машина использует трехадресный код и работает по системе с учетом порядков. Она насчитывает 800 ламп и по-

Фиг. 2

К реф. 3486

требляет мощность 7,5 *квт*. МИДАК, кроме запоминающего устройства на линиях задержки, имеет магнитный барабан. Завершена машина ОРАКЛЕ (ORACLE). Фирмой «Ремингтон Ранд» спроектирована и выпущена машина для хранения и обработки графиков движения самолетов (РЖМат, 1955, 537) и машина «Спид Толли» для хранения и систематизации торговых поручений (РЖМат, 1955, 1574, 1575).

В течение года велись работы по усовершенствованию старых и разработке новых элементов вычислительных машин, в частности по исследованию полупроводниковых триодов и запоминающих устройств на магнитных сердечниках. На машине «Вихрь-1» (Whirlwin 1) электростатическое запоминающее устройство было заменено 2048 запоминающими регистрами на магнитных сердечниках (см. фиг. 2), причем время выбора данных уменьшалось вдвое. Демонстрировалось статическое магнитное запоминающее устройство на 10 000 кодов. На машине ЭНИАК (ENIAC) велись экспериментальные работы по использованию статического магнитного запоминающего устройства. Время выбора составляло 25 *мксек*. Велись работы над магнитными элементами, выполняющими операции включения, смещения, хранения, формирования, усиления по мощности и т. д. Все эти элементы работают на частоте 100 *кгц*.

В разделе «Пьезоэлектричество» указывается, что в течение 1953 г. велись работы по исследованию свойств ферроэлектриков и их применению в качестве возбудителей колебаний, измерителей ускорения и т. д. Продолжались работы по использованию ферроэлектриков в качестве элементов запоминающих устройств вычислительных машин и различных вентильных схем. В 1953 г. было налажено производство кристаллов кварца высокого качества путем искусственного их наращивания. Были также предложены неизвестные ранее ферроэлектрические материалы. Керамика $PbZrO_3$—$PbTiO_3$ становится ферроэлектриком при 42% содержания $PbTiO_3$. Керамика имеет температуру Кюри 550° С и диэлектрическую постоянную 280. В Пенсильванском университете были исследованы свойства ряда ферроэлектриков. Установлено, что $Cd_2Nb_2O_7$ и $Pb_2Nb_2O_7$ становятся ферроэлектриками и при 170° К, при 15,4° К наступает максимум диэлектрической постоянной. Исследовались ферроэлектрики $LiNH_4C_4H_4O_6$— H_2O и $NaNbO_3$ — $KNbO_3$. Было также найдено, что добавление в титанат бария $CaTiO_3$ и $PbTiO_3$ поднимает его температуру Кюри и уменьшает потери.

В разделе «Полупроводники» отмечается, что большие работы велись по полупроводниковым элементам, в частности полупроводниковым триодам. Исследования были направлены в сторону получения более стойких триодов, с большим сроком службы. Были предложены новые типы полупроводниковых приборов: диод, имеющий стабильную характеристику с отрицательным сопротивлением; тетрод, имеющий более высокие параметры по сравнению с обычным полупроводниковым триодом на высоких частотах. Был создан целый ряд схем на полупроводниковых диодах и триодах: вентили, включающие схемы и пр. Были собраны также экспериментальные амплитудно-модулированные и частотно-модулированные радиоприемники и телевизионный приемник, потребляющий мощность 13 *вт*, из которых 4 *вт* шло на накал кинескопа.

Точечные полупроводниковые триоды применялись в высокочастотных генераторах. Создана специальная аппаратура для проверки полупроводниковых триодов, работающая в диапазоне частот от 1 *кгц* до 1 *Мгц*. Были разработаны новые методы производства, позволяющие получить стабильные характеристики у различных экземпляров.

В разделе «Средства навигации» указывается, что успешно развивалось применение вычислительных устройств в целях навигации. Был выпущен панорамный указатель курса самолета и ряд других устройств.

По всем перечисленным вопросам в обзоре приведена обширная библиография. Кроме этого, можно найти библиографию по электроакустике, магнитной записи, теории информации и т. п. Л. С. Легезо

3487. Запоминающие устройства. Феррanti (Storage systems. Ferranti Barry Z. de), Wireless World, 1954, **60**, № 8, 392—397 (англ.)

Рассматриваются запоминающие элементы, использующие ферроэлектрики. Матрица, изготовленная из ферроэлектрических элементов, имеет малые габариты и потребляет небольшую мощность. Достигнута плотность записи 40 разрядов на 1 $см^2$ поверхности кристалла. Недостатком системы является большая чувствительность к изменениям внешних условий (температуры и т. п.). Матрицы на тороидальных ферритовых сердечниках имеют малые габариты и малое время выборки, но требуют громоздкой дополнительной аппаратуры и потребляют большие токи. Рассматриваются линии задержки и сдвигающие регистры, образованные последовательно соединенными магнитными усилителями релейного типа. Такой регистр может работать на частоте до 100 *кгц*. Автор предполагает, что наиболее надежным магнитным запоминающим устройством в настоящее время является барабан. Отмечается за последнее время тенденция наносить на барабан ферромагнитные покрытия, так как на них можно получить более высокую плотность записи по

сравнению с электролитическими покрытиями. На барабане диаметром 150 *мм*, длиной 300 *мм* при скорости в 6000 об/мин и плотности записи примерно 6 импульсов на 1 *мм* может быть запомнена информация, содержащая 1 000 000 разрядов. Отмечается, что экспериментальные образцы барабанов имеют скорость 75 000 об/мин. Рассматриваются также запоминающие устройства на ультразвуковых линиях задержки и электростатические запоминающие устройства на электроннолучевых трубках. А. И. Щуров

3488. **Дискуссия по работе «Устройство ультразвуковой памяти на ртутных линиях задержки первой модели счетной машины АКЕ»** (Discussion on «The mercury-delay-line storage system of the ACE pilot model electronic computer»), Proc. Instn. Electr. Engrs, 1954, **101**, part 2, № 79, 65 (англ.)

См. РЖмат, 1954, 3096.

Предлагается введение отрицательной обратной связи в усилитель тракта регенерации, собранный по схеме прямого усиления. Приводятся данные усилителя, сконструированного в 1949 году, для ртутных линий задержки на трех лампах типа СУ138 с усилением 56 *дб*, полосой 8,5—14 *Мгц* и линейным фазовым сдвигом на этой полосе. 10%-ное снижение анодных напряжений и 30%-ное снижение напряжения накала не ухудшало характеристики усилителя.

В ответе авторов указывается, что они отказались от усилителя с обратной связью, т. к. ее введение вызывает ряд трудностей и усложняет наладку.

О машине АКЕ (ACE) см. РЖМат, 1954, 2408, 2416, 2752. Г. А. Хавкин

3489. **Запоминающее устройство на металле** (Memory in metal), Steel, 1954, **134**, № 11, 92 (англ.)

Сообщение фирмы «Лоджистикс Рисёрч» (Logistics Research) об окончании экспериментальных работ по новому запоминающему устройству на большом магнитном барабане, емкость которого превышает в 200 раз емкость обычного магнитного барабана (РЖМат, 1955, 470). Л. С. Легезо

3490. **Съемный блок запоминающего устройства для вычислительных машин** (Computer memory unit), Proc. I. R. E., 1954, **42**, № 2, 58A (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3890, 4230.

3491. **Обзор преобразователей непрерывных величин в дискретные. Берк** (A survey of analog-to-digital converters. Burke Harry E., Jr), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 10, 1455—1462 (англ.)

Дано общее описание основных способов преобразования данных из непрерывной формы в дискретную.

1. На вращающийся вал насажен диск с прорезями, через которые освещается фотоэлемент. При вращении вала фотоэлемент дает импульсы, число которых фиксируется реверсивным электронным счетчиком.

2. Напряжение, подлежащее преобразованию, подается в схему с кристаллическими выпрямителями, которые имеют напряжение запирания, соответствующее различным дискретным значениям амплитуды напряжения. Когда амплитуда напряжения достигает величины напряжения запирания, ток в выпрямителе резко возрастает и включает индикатор, представляющий электрический эквивалент многоконтактного индикатора положения.

3. Угловое перемещение преобразовывается в дискретную величину с помощью контактного коммутатора, фиксирующего величину перемещения по так называемой «фазовобинарной» системе.

4. Изменение многих непрерывных величин таких, как сопротивление, емкость, перемещение и т. д., может быть преобразовано в изменение частоты, которая может быть измерена в виде числа импульсов за фиксированный интервал времени.

5. Напряжение, подлежащее преобразованию, сравнивается по амплитуде с линейно-нарастающим пилообразным напряжением. Момент равенства амплитуд фиксируется импульсом, который отмечает время t от нуля напряжения до измеренной величины. Это время измеряется электронным счетчиком, который сосчитывает импульсы генератора стандартной частоты за время t. Аналогичная схема может быть применена для преобразования углового перемещения в дискретную величину по фазовому углу между опорным и измеряющим напряжением.

6. Преобразование с помощью электроннолучевой трубки, на экран которой накладывается маска с прорезями, кодирующими отклонение электронного луча в виде импульсов фототока (РЖМат, 1954, 3518).

7. Преобразование углового перемещения с помощью вращающегося магнитного барабана (или фотоэлектрического устройства с барабаном). При вращении барабана счетчик сосчитывает число импульсов, нанесенных на поверхности барабана, пропорциональное угловому перемещению.

8. Преобразователи, основанные на компенсационном методе сравнения измеряемого напряжения с напряжением декадного потенциометра, механическое перемещение щеток которого преобразовывается в импульсы.

9. Преобразование напряжения в число импульсов с помощью сравнения измеряемого напряжения с суммой напряжений, снимаемых с анодов триггерных ячеек счетчика. На вход счетчика подаются импульсы от стандартного генератора, которым управляет нуль-усилитель компенсационной схемы. На вход нуль-усилителя подается напряжение разности между суммой напряжений анодов счетчика и измеряемой величиной. Указывается, что процессы, протекающие с большой скоростью (как, например, полет ракеты), могут быть предварительно записаны на магнитной ленте, которая после используется для табулирования и вычислений с пониженной скоростью.

Библиография, 12 названий. Ф. В. Майоров

3492. **Машина для обработки непрерывных данных** (Data-reduction machine), Instruments and Automat., 1954, **27**, № 2, 234 (англ.)

Сообщение фирмы «Бенсон-Ленер» (Benson-Lehner Corp., Los Angeles, Calif.) о выпуске нового устройства БОСКАР (Boscar) для обзора на экране непрерывной информации, полученной из различной аппаратуры. Устройство автоматически измеряет координаты точки — указателя по двум осям и передает данные на построитель кривых, десятичный преобразователь, телетайп или перфоратор. От других типов подобных устройств машина отличается тем, что перемещение точки — указателя по экрану осуществляется не с помощью шнуров зубчаток и т. п., а посредством клавиатуры.

Л. С. Легезо

3493. **Преобразователь непрерывных величин в цифровые** (Analog to digital converter), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 5, 404 (англ.)

Сообщение фирмы «Джианнини» (G. M. Giannini & Co.) о выпуске преобразователя углового положения вала в цифровую форму. Преобразователь состоит из монтируемого на валу многосегментного коммутатора, панели реле и тиратронной схемы; он может быть присоединен к телетайпу или перфоратору.

Максимальная скорость вращения вала 100 об/мин. Точность цифрового выражения угла 0,1% при непосредственном (без зубчатого зацепления) соединении коммутатора с валом. Приведена фотография. Н. Б.

3494. **Прибор для преобразования непрерывных данных в дискретные** (Magnetic memory-digitizer speeds up handling of data), Petrol. Process., 1953, 8, № 10, 1588 (англ.)

Сообщение фирмы «Поттер» (Potter Instrument Co.)

о выпуске прибора для преобразования непрерывных данных в дискретные, в котором процесс обработки данных ускорен благодаря применению магнитной ленты в качестве основного запоминающего устройства. Запись можно производить сразу по четырем каналам с большой скоростью и воспроизводить ее с меньшей скоростью, необходимой для перенесения информации на перфокарты, печати или для передачи в вычислительную машину. В. В. Карибский

3495. Устройство для преобразования данных (Instrument data converter), Instruments and Automat., 1954, **27**, № 2, 234 (англ.)

Сообщение фирмы «Рей» (J. B. Rea Co.) о выпуске нового быстродействующего преобразователя непрерывных данных в цифровые. Входные данные могут приниматься непосредственно с термопары, прибора для измерения деформации и т. п. В различных режимах работы устройство обеспечивает выдачу от 640 до 8000 знаков в 1 сек. Интервал выдачи информации может выбираться вручную или предварительно устанавливаться с помощью вспомогательного устройства. Л. С. Легезо

3496. Устройство для преобразования данных из цифровой формы в непрерывную (положение вала). О'Нил (Digital-to-analogue shaft-position transducers. O'Neil S. J.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, **72**, part 1, 37—41 (англ.)

Описываемое устройство основано на взаимодействии магнитных полей статора и ротора мотора. Установленное на регистре число управляет токами обмоток статора, вследствие чего ротор становится в нужное положение. Токи в обмотках статора должны быть пропорциональны синусам числа, установленного в регистре. Для формирования токов статора употребляется делитель напряжения, секции которого закорачиваются контактами реле.

Синусоида при этом аппроксимируется либо трапецией, либо сложной ломаной. В. Д. Князев

3497. Прибор для цифрового представления напряжения (Voltage digitizer), Petrol. Refiner, 1953, **32**, № 7, 235 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5342.

3498. Десятичные счетные лампы. Кандиах (Decimal counting tubes. Kandiah K.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 312, 56—63 (англ.)

Обзор и сравнение наиболее распространенных типов счетных ламп, в частности в смысле разрешающего времени, допусков на детали и на питание.

Все рассматриваемые лампы распадаются на три категории. К первой категории относятся газонаполненные лампы (лампы с холодным катодом), которые содержат общий анод и ряд (обычно десять) независимых рабочих катодов. Между двумя соседними рабочими катодами помещаются от одного до трех вспомогательных. Тлеющий разряд остается стабильно на одном из катодов, определяя этим счетное состояние лампы. Приложенный импульс сдвигает разряд с данного катода через вспомогательные катоды к следующему рабочему. Разрешающее время между двумя последующими счетными импульсами меняется от 30 до 250 μсек. в зависимости от геометрии электродов и газового наполнения.

Из этой категории ламп описаны: 1) подробно лампа GC10B фирмы «Эриксон» (Ericsson), имеющая две группы вспомогательных катодов (РЖМат, 1954, 4229); приведена схема счетчика на таких лампах на 4 или 5 декад с внутренней стабилизацией питания; схема потребляет 1 *а* при 6,3 *в*, 12 *ма* при +500 *в* и 3 *ма* при —250 *в* нестабильного напряжения; разрешающее время 250 μсек.; 2) лампа G10/241E фирмы «Стандард Телефонс энд Кейблс» (Standard Telephones and Cables) с одной группой вспомогательных катодов, критичная к амплитуде сигнала; 3) лампа GC10D фирмы «Эриксон» с тремя группами вспомогательных катодов, допускающая разброс ± 20% на амплитуду сигнала; разрешающее время двух последних типов ламп 50 μсек.; 4) лампа 6167 фирмы «Белл» (Bell Telephones) с вмонтированным внутри колбы триггером для усиления мощности выходного сигнала; разрешающее время 100 μсек., а при использовании триггера до 250 μсек.

В лампах 2)—4) запуск осуществляется одним импульсом; решающую роль играют постоянные времени в цепях электродов.

Ко второй категории счетных ламп относятся подогревные вакуумные лампы с электростатическими фокусирующей и отклоняющей системами. Положение луча фиксируется в 10 возможных стабильных состояниях и указывается на флюоресцирующем экране, поэтому удобно этот тип ламп называть катоднолучевым. Из этой категории рассматривается лампа типа EIT (РЖМат, 1954, 5822) фирмы «Филипс» (Philips) с лучом в виде узкой полосы. Разрешающее время 30 μсек. Приведена принципиальная схема счетчика на одну декаду. Стабильность части деталей требуется ±2%; стабильность напряжений питания ±10%. Приведены характеристики лампы EIT. Лампа критична к амплитуде и форме сигналов.

К третьей категории относятся трохотроны, в которых управление электронным лучом осуществляется электростатическим и магнитным полями. Геометрия электродов обеспечивает 10 возможных путей электронного пучка.

Подробно рассматривается трохотрон AD3 фирмы «Эриксон», приводятся его характеристики и схема включения. Трохотрон AD3 имеет разрешающее время 5 μсек., которое может быть сокращено до 1 μсек. за счет усложнения схемы. Лампа критична к амплитуде и форме сигналов.

Отмечена стабильность характеристик всех счетных ламп и их надежность. В. К. Зейденберг

3499. Лампа, которая считает (A tube that counts), Iowa Engr, 1953, **54**, № 3, 52 (англ).

Сообщение фирмы «Уэстерн Электрик» (Western Electric) о десятичной газоразрядной счетной лампе 6167, которая может считать со скоростью до 2000 имп/сек. Приведена фотография лампы Л.С. Легезо

3500. Вычисление в течение 32 часов в сутки (Computing 32 hours a day), Business Week, 1955, № 1322, 32, 34 (англ.)

Краткая заметка об организации вычислительной работы на предприятиях фирмы «Дженерал Электрик». Фирма имеет машину типа ИБМ-701 на заводе в Инендейле (Evendale), около Цинцинатти, штат Огайо, Машина работает 24 часа в сутки, однако не успевает выполнять все задания. Фирма арендовала еще одну машину ИБМ-701 в Нью-Йорке на 8 час. в день. Передача данных производится специальным электронным передатчиком данных (Electronic Data Transceiver), разработанным фирмой ИБМ. Передатчик работает с перфокарт и выдает результаты также на перфокартах. Использование такого передатчика открывает возможности объединения ряда вычислительных машин, расположенных в разных местах в единую систему. Это позволит более эффективно эксплуатировать машины. Д. П.

3501. Лентопротяжный механизм для цифровых запоминающих устройств (Digital tape handlers), Instruments and Automat., 1954, **27**, № 3, 386 (англ.)

Фирма «Поттер Инструмент» (Potter Instrument Co.) сообщает о выпуске новой модели лентопротяжного механизма «902». Механизм имеет время пуска и остановки 5 мсек., различные скорости ленты в пределах от 380 до 1520 *мм/сек* и три различные ширины ленты 6,3, 12,5 и 16 *мм*. При ширине 16 *мм* запись может ве-

стись одновременно по восьми параллельным каналам. А. И. Щуров

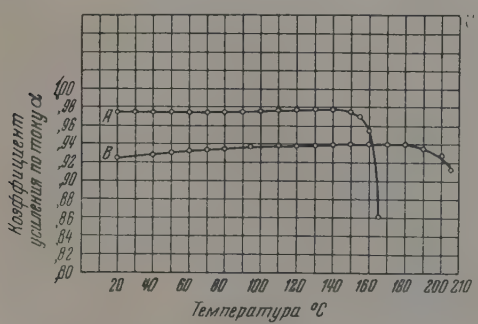
3502. Выходное устройство для вычислительных машин, снабженное экраном (Output recorder provides calculator with «windows»), Electr. Engng, 1955, **73**, № 2, 141 (англ.)

Краткое сообщение о предстоящем выпуске фирмой ИБМ выходного устройства типа 740 для вычислительных машин, снабженного катодной трубкой и дающего возможность видеть на экране график решения. Устройство предназначено для работы с вычислительными машинами ИБМ-701 и ИБМ-704, которых работает 18 штук. Д. П.

3503. Кремниевые кристаллические триоды. Адкок, Джонс, Торнхилл, Джэксон (Silicon transistor. Adcock W. A., Jones M. E., Thornhill J. W., Jackson E. D.), Proc. I. R. E., 1954, **42**, № 7, 1192 (англ.)

Сообщение о свойствах кристаллических триодов типа *n-p-n*, изготовленных из пластины монокристалла кремния толщиной 12,5 μ фирмой «Техас Инструментс» (Texas Instruments). Время жизни неосновных носителей в районе коллектора примерно 20 μсек. Контакт с базой осуществлялся посредством припаянной алюминиевой проволоки. Приведена таблица сравнительных характеристик для германиевого и кремниевого кристаллических триодов.

Параметры	Кремниевый кристаллический триод	Германиевый кристаллический триод
$I_{к0}$ при 25° ($V_к$=5*в*)	0,4 *μа*	4,0 *μа*
$I_{к0}$ при 150° ($V_к$=5*в*)	20 ÷ 50 *μа*	очень большой
$R_э$	25 ÷ 75 *ом*	22 *ом*
$R_б$	100 ÷ 300 *ом*	170 *ом*
$R_к$	0,6 ÷ 1,5 *Мом*	1,8 *Мом*
Коэффициент усиления по току α (для заземленной базы)	0,90 ÷ 0,98	0,96
Предельная частота	7,2 ÷ 7,5 *Мгц*	1,1 *Мгц*
Шум-фактор	16 ÷ 22 *дб*	23 *дб*



К реф. № 3503

Приводятся экспериментальные характеристики коэффициента усиления по току α в зависимости от окружающей температуры для двух образцов кремниевых триодов (см. фиг.). Резкое уменьшение α наступает лишь при повышении температуры до 150°. Приводятся данные по изменению параметров эквивалентной схемы кремниевого триода в зависимости от температуры окружающей среды. При 25° кремниевый триод способен рассеивать мощность до 250 *мвт*. При повышении температуры до 100° допустимая мощность рассеивания падает в 2 раза. При соответствующем конструктивном оформлении этот же триод допускает рассеивание мощности 1÷1,5 *вт* при 25°. Отмечаются исключительные перспективы для применения кремниевых триодов на высоких частотах. А. Б. Залкинд

3504. Кремниевые кристаллические триоды испытываются при 350°Ф (Silicon transistors test to 350 degrees), Western Aviat., 1954, **34**, № 3, 16 (англ.)

Краткое сообщение об опытных образцах слоевых кремниевых кристаллических триодов фирмы «Райтеон» (Raytheon Manufacturing Co.). Указывается, что были проведены успешные испытания образцов при температуре окружающей среды до 180° С. Массовое применение кремниевых слоевых триодов в ближайшее время считается маловероятным. А. Б. Залкинд

3505. Слоевые кремниевые диоды (Silicon junction diodes), Electronics, 1955, **28**, № 1, 221 (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Хьюз» (Hughes) о выпуске серии кремниевых диодов, предназначенных для работы при высоких температурах. Диоды выпускаются в герметически запаянном стеклянном корпусе длиною около 6,5 *мм* и диаметром около 2,5 *мм*, покрытом черной кремниевой эмалью, предохраняющей кристалл от света. Диоды могут работать в диапазоне температур от —80 до +200°. Электрические характеристики приводятся в таблице.

Тип	Максимальное обратное напряжение, *в*	Прямой ток, *ма* (при +1*в*)	Обратный ток (*μа*) при 25°	Обратный ток (*μа*) при 150°	Обратный ток (*μа*) напряжение на диоде, *в*
HD 6001	25	15	0,5	30	$u_к$= —25
HD 6002	70	5	0,5	30	—60
HD 6003	200	1	0,5	30	—175
HD 6005	30	40	0,025	5	—25
HD 6006	70	20	0,025	5	—60
HD 6007	150	7	0,025	5	—125
HD 6008	200	3	0,025	5	—175
HD 6009	150	3	0,5	30	—125

3506. Двадцативаттный полупроводниковый триод (20-watt transistor), Instruments and Automat., 1954, **27**, № 1, 20 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Миннеаполис-Хонейвелл» (Minneapolis-Honeywell) о разработке полупроводникового триода с выходной мощностью 20 *вт*. Указывается, что изготовление этого мощного триода размером с наперсток оказалось возможным благодаря открытию эффективного способа отвода тепла. Триод может быть использован для приведения в действие моторов, ламп, реле и другого обрудования; он включен в макет разработанного фирмой авиационного электронного топливомера.

Приведено фото.

3507. Полупроводниковые триоды и их схемы в коммутационной системе 4А для разветвленной телефонной сети. Маллери (Transistors and their circuits in the 4A toll crossbar switching system. Mallery P.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, **72**, part 1, 388—392 (англ.)

Излагается принцип действия и результаты лабораторных испытаний карточного искателя свободных междугородных линий, построенного фирмой «Белл» с применением германиевых триодов (фототриодов и усилителей переменного напряжения), ламп с холодным катодом и реле. Приводятся принципиальные схемы электрических цепей, фотографии отдельных дета

лей, а также данные испытаний на старение и температурных испытаний германиевых элементов при работе в описываемом устройстве. Н. Б.

3508. Полупроводниковые триоды в коммутационной системе для разветвленной телефонной сети. Маллери (Transistors in 4A toll crossbar switching. Mallery P.), Electr. Engng, 1954, **73**, № 2, 129 (англ.)

См. реф. 3507.

3509. Новые данные по германиевым диодам (Revised germanium diode data), Radiotronics, 1954, **19**, № 1, 9—11 (англ.)

Перечень (22 вида) германиевых диодов фирмы «Amalgamated Wireless Valve Co.» с указанием их назначения и величин прямого и обратного тока в одной-трех точках, а также цветной маркировки. Общие данные всех диодов: емкость от 0,2 до 1,0 *мкф*; температурный диапазон работы от —100 до +120°; диоды выдерживают погружение в кипяток или действие пара низкой температуры, сильную вибрацию и пайку без всяких предосторожностей. Ожидаемый срок службы 10 000 час.; срок хранения 10 лет.

Все диоды подразделяются на две категории. К первой относятся диоды из чистого германия, характеризующиеся высоким обратным напряжением, прямым током 50 *ма* (постоянный ток), величиной случайной допустимой перегрузки в течение 1 сек. до 0,5 *а* и мощностью рассеивания до 120 *мвт*; имеется диод с обратным напряжением 220 *в*. Диоды второй категории обладают низким сопротивлением за счет примесей к германию; ток при +1 *в* достигает 3÷4 *ма*.

Диод GEX 56 с очень высоким обратным сопротивлением сконструирован специально для применения в вычислительных машинах и дает ток при +1 *в* больше 1 *ма*, при —10 *в* меньше 2 *мка*. В. К. Зейденберг

3510. Германиевые диоды из сферических шариков. Данлап (Germanium diodes from spherical pellets. Dunlap W. C., Jr), J. Appl. Phys., 1954, **25**, № 4, 448—451 (англ.)

Описывается метод получения шариков германия диаметром 0,4 *мм*. Шарики образуются при затвердевании капелек германия высокой чистоты, выдавливаемых из графитового тигля через отверстие диаметром 0,4 *мм* в дне тигля в дистиллированную воду. Шарики получаются *p*-типа проводимости, но отжиг при 500° в течение одного дня переводит их снова в *n*-тип. Каждый шарик состоит из нескольких кристалликов, что снижает их ценность для производства диодов.

Приводится схема установки. Производительность ее — несколько сот тысяч шариков за несколько минут.

Из этих шариков изготовлены диоды, в которых взамен точечного контакта зонда с полупроводником используется контакт сферической поверхности германия с молибденовой пластинкой. Данные такого диода следующие: прямой ток при 1 *в* составляет 7,1 *ма*, обратный ток при 40 *в* составляет 2,7 *ма*. Преимущества этих диодов: низкая стоимость, возможность автоматизированного серийного производства.

Описаны и приведены фотографии изготовленных батарей последовательно соединенных диодов, выдерживающих 1000 *в* (25 соединенных диодов). Обратные характеристики этих батарей хуже, чем для одиночных диодов. В. С.

3511. Изготовление и испытание германиевых триодов (Manufacture and testing of germanium triodes), Mach. Lloyd. Overseas Ed., 1954, **26**, № 6, 81, 83—87 (англ.)

Приводится описание методики изготовления германиевых точечных триодов фирмы «Дженерал Электрик». Приводится типичная статическая характеристика выпускаемого ею триода GETI. Описывается испытание на стабильность. Приведено краткое сравнение преимуществ и недостатков точечных и с поверхностным контактом германиевых триодов типов *n-p-n* и *p-n-p*. между собой и с вакуумными электронными лампами. В. С.

3512. Изготовление и испытание германиевых триодов (Manufacture and testing of germanium triodes), Mach. Lloyd. Europ. Ed., 1954, **26**, № 10A, 59, 61—65 (англ.)

Повторная публикация статьи (см. реф. 3511). В. С.

3513. Производство и испытание германиевых выпрямителей (The manufacture and testing of germanium rectifiers), Electr. Manufacturer, 1954, **10**, № 1, 15—18 (англ.)

Рассматривается конструкция и технология изготовления германиевого выпрямителя фирмы «Дженерал Электрик».

Приведены фото: 1) полуавтоматического столика для вваривания в стеклянный корпус выпрямителя железоникелевых трубок, 2) быстродействующего аппарата точечной сварки кристалла с держателем и 3) устройства, позволяющего правильно подобрать давление контактной пружинки на кристалл. Дана схема контроля выпрямителей по статической характеристике, получаемой на экране осциллографа. Я. Н.

3514. Обзор магнитных и ферроэлектрических элементов вычислительных машин. Ньюхаус (A review of magnetic and ferro-electric computing components. Newhouse V. L.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 315, 192—199 (англ.)

Обзор составлен в основном по данным американской технической периодики на март 1953 г.

Отмечается, что в области линий задержки максимальными значениями частоты повторения импульсов и числа цифр на единицу длины линии являются 5 *Мгц* и 40 цифр на 1 *см* для ртутных линий и 1 *Мгц* и 2 цифры на 1 *см* для никелевых магнитострикционных линий. Плотность размещения информации на магнитном барабане достигает тех же значений, что и в ртутных линиях. Статические магнитные регистры допускают скорости до 100 *кгц* при использовании металлических магнитных материалов с толщиной порядка 25 *мк*. Использование ферритов для этих целей ограничивается бо́льшим значением проницаемости в насыщенном состоянии. Феррорезонансные триггеры при частоте питания в 2 *Мгц* допускают работу со скоростью 100 *кгц*.

Указывается, что усовершенствование быстродействующих магнитных запоминающих устройств и переключателей зависит от получения ферритов с меньшей коэрцитивной силой и более прямоугольной петлей.

Отмечается возможность использования дрейфа дырок в германии и малой скорости распространения электромагнитных волн в ферритах для получения линий задержки.

Описывается матричное запоминающее устройство на ферритовых сердечниках. Приведены краткие сведения о ферроэлектрических элементах. О. В. Росницкий

3515. Конторское оборудование. Вычислительные машины (Office equipment. Calculating machines), Municip. J., 1954, **62**, № 3183, 380 (англ.)

Краткая заметка о двух многоклавишных машинах фирмы «Архимедес» (Archimedes-Diehl-Machine Co. Ltd.) — полуавтомате мод. «А» и автомате мод. «В», имеющих счетную емкость 9×9×18 разрядов (емкость установочного механизма × емкость счетчика оборотов × емкость счетчика результатов). В машине мод. «В» умножение осуществляется автоматически новым «сокращенным» способом. Н. Н. Парусникова

3516. Усовершенствованные бухгалтерские машины. Немецкий экспорт, 1953, № 1, 57

Краткая заметка о выпускаемой в Германской Демократической Республике бухгалтерской полноклавишной машине «Континенталь класс 900» с широкой подвиж-

ной кареткой, имеющей бумагоопорный валик длиной 62 *см*. С целью более эффективного использования данных машин при составлении отчетности в различных областях учета машина выпускается в нескольких моделях, отличающихся главным образом количеством суммирующих счетчиков: мод. 905/4, 907/4, 909/4 и 913/6. Бумагоопорный валик последней может быть разделен на 2 части. Н. Н. Парусникова

3517. Простая, практичная, надежная счетная машина «Архимедес» из Гласхютте. Немецкий экспорт, 1953, № 4, 52

На выставке в г. Лейпциге в 1952 г. впервые была продемонстрирована новая вычислительная полуавтоматическая машина «Архимедес» мод. «NEL». В настоящее время эта машина выпускается в двух моделях, отличающихся емкостью счетных механизмов: «NEL 15» и «NEL 18». В основу устройства счетной части положен принцип ступенчатых валиков. Н. Н. Парусникова

3518. Операции изготовления деталей «Паурс-Сеймас» (Operations in building Powers-Samas punched card equipment), Mach. Shop Mag., 1953, **14**, № 3, 101—111 (англ.)

Дается подробное описание технологического процесса изготовления деталей печатающих штанг механических алфавитных табуляторов на заводах «Паурс-Сеймас». Приведены фотографии гибочных штампов и приспособлений для фрезеровки пазов печатающих штанг.

Во второй части статьи дано описание технологического процесса изготовления деталей методом холодной высадки и обжимки для получения заданных конфигураций обрабатываемых деталей, даны также фотографии рабочих приспособлений для выполнения указанных операций. В. Н. Рязанкин

3519. Дальнейшие операции при изготовлении счетно-аналитических машин «Паурс-Сеймас» (Further operations in building Powers-Samas punched card eqipment), Mach. Shop Mag., 1953, **14**, № 6, 269—276 (англ.)

Дается подробное описание технологии изготовления сектора цифровой штанги табулятора с фотографиями специальных приспособлений к станкам для фрезировки пазов под цифровые знаки штанги.

Во второй части статьи дается описание изготовления направляющих и матрицы двухпериодного перфоратора для 60-колонной перфокарты с прямоугольными пробивками отверстий. Указано два способа изготовления прямоугольных отверстий пробивкой их специальным штампом и сверлом с последующей калибровкой с применением многошпиндельной сверлильной головки.

Описание обоих технологических процессов изготовления направляющих и матрицы иллюстрируется фотографиями применяемого специального инструмента и оборудования.

См. также РЖМат, 1954, 5351; 1955, 3518.

В. Н. Рязанкин

3520. Новая счетная машина — табулятор «Т5». Исакович Е., Рохлин И., Бухгалтерский учет, 1953, № 10, 17—23

Приводится описание табулятора Т5, проводится сравнение его с табулятором Т4МИ.

3521. Развитие электронных вычислительных устройств. Пилоти (Die Entwicklung elektronischer Rechengeräte. Piloty H.), Radio Mentor, 1954, **20**, № 5, 281—283 (нем.)

Обзорный доклад о принципах работы и устройстве современных цифровых вычислительных машин.

Г. М. Грязнов

3522. Ее называют «Мадам». Всемирные студенческие новости, 1954, № 1, 10

Популярно описывается Манчестерская быстродействующая вычислительная машина (РЖМат, 1955, 982, 983). Сообщается о разработке электронного записывающего устройства со скоростью записи около 160 знаков в 1 сек. В. В. Карибский

3523. Первая схема электрической логической машины. Мейс (The first circuit for an electrical logic-machine. Mays W.), Science, 1953, **118**, № 3062, 281—282 (англ.)

Сообщается, что недавно проф. А. Чёрч (A. Church) обнаружил в рукописях проф. Алана Маркванда (Alan Marquand) схему релейной логической машины, начерченную, вероятно, около 1885 г. В заметке приведена фотокопия оригинала схемы и дано краткое описание схемы и ее работы.

Эта схема является электрическим аналогом механической логической машины, построенной Марквардом в 1883 г. (Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., 1885). Как и эта последняя, описываемая в заметке схема предназначена для преобразования некоторых формул исчисления предложений, зависящих от четырех независимых предложений A, B, C, D, в нормальную дизъюнктивную форму. В. И. Шестаков

3524. Цифровые вычислительные машины. Райхман (Digital computers. Rajchman Jan A.), Instruments, 1953, **26**, № 11, 1711, 1739—1740 (англ.)

Популярная статья о развитии цифровых вычислительных машин. Указывается на переход в ближайшем будущем к безламповым устройствам, надежность которых позволит использовать их непосредственно в производственных процессах. Предлагается использовать цифровую вычислительную машину в технологическом цикле получения найлона. Различные качества получаемого найлона (эластичность, износ и др.) являются сложными функциями технологического процесса: температуры, давления и др. А. Б. Залкинд

3525. Электронные вычислительные машины. Майоров Ф. В., Природа, 1954, № 11, 13—23

Научно-популярная статья.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

3526. Автоматическое управление станками. Каннингем (Controlling machine tools automatically. Cunningham Frederick W.), Mech. Engng, 1954, **76**, № 6, 487—490 (англ.)

Рассматриваются методы управления станками при помощи устройств, принимающих информацию с перфоленты. Может быть предложено 2 метода кодировки информации: задать только конечное положение инструмента или задать траекторию инструмента в виде достаточно мелких шагов для обеспечения нужной точности. В первом случае задается одно число с большим количеством разрядов, во втором — большое количество чисел с малой разрядностью.

Сложность управляющего устройства будет определяться количеством различных видов информации. Например, для управления сверлильно-расточным станком требуется 4 вида информаций: две координаты, определяющие положение отверстия, его глубина и диаметр.

Приводится способ приготовления перфоленты без каких-либо предварительных расчетов. В этом случае станок снабжается устройством, которое переводит движение инструмента, управляемого оператором, в информацию на ленте. Недостатком метода является запись на ленту всех лишних движений, совершаемых оператором. Контроль за работой устройства может быть осуществлен сравнением вводимой информации или сравнением положения инструмента с информацией, получаемой с контрольной ленты.

Приводятся примеры устройств управления. Устройство, предложенное Козинсом, использует ленту шириной 112,5 *мм*, на которой поперек располагаются 4 группы информаций, каждая группа имеет четыре двоичных разряда, с помощью которых выбирается одно из 16 реле. Выбранное реле подает на синхронный мотор одно из 16 напряжений, дающих определенное угловое перемещение ротора мотора, управляющего движением инструмента по одной координате.

Система, разработанная Массачусетским технологическим институтом (РЖМат, 1955, 539—541), предназначена для управления фрезерным станком. Это устройство позволяет перемещать режущий инструмент по трем координатам. Кодируется длина и время перемещения режущего инструмента, причем минимальное время равно 2 сек. Устройство позволяет получить точность до 0,01 *мм* при скорости резания 37,5 *см* в 1 мин.

Фирмой «Арма Корпорейшн» (Arma Corporation) (РЖМат, 1955, 542) был построен токарный станок, управляемый цифровым устройством.

Описывается устройство управления станком для обработки нецилиндрических зубчатых колес.

В. Д. Князев

3527. Вождение автомобилей при помощи электроники. Бертон (Electronic driving. Burton James), Iowa Engr, 1953, 54, № 1, 47—48 (англ.)

Приводятся соображения о принципах построения устройств для автоматического управления автомобилем. Для поддержания прямолинейного движения автомобиля в полотно автострады укладывается кабель, создающий электромагнитное поле. Это излучение принимается двумя катушками, расположенными по сторонам автомобиля. Благодаря разности в интенсивности принимаемых сигналов при отклонении оси автомобиля от кабеля, устройство воздействует на рулевое управление таким образом, чтобы совместить ось автомобиля с кабелем. Могут быть построены схемы, дающие при прохождении над ними впереди идущего автомобиля посылку в кабель сигнальной частоты. Когда задний автомобиль попадает в зону действия этих сигналов, то соответствующее устройство воздействует на тормоза и предохраняет от столкновения. Рассматривается возможность построения устройства, осуществляющего обгон медленно идущего автомобиля. Исследования велись в Принстонском исследовательском центре фирмы RCA. Опыты проводились на полуторарометровой модели автомобиля. В. Д. Князев

3528. Моделирование полета (Simulating flight), Canad. Aviat., 1954, 27, № 3, 45 (англ.)

Английской фирмой «Редифон» (Redifon Ltd) по заказу департамента оборонного производства Канады построен авиационный тренажер Сейбр F-86E.

Тренажер дает возможность поставить тренирующемуся летчику любые задачи по управлению самолетом. Эти задачи вводятся вычислительным устройством, которое состоит из электронных и электромеханических блоков, моделирующих полет самолета и выдающих результат вычислений на приборы тренажера. Эти блоки представляют собой либо интеграторы, либо датчики позиционных сигналов с функциональными профильными потенциометрами. Каждое перемещение органов управления и сектора газа влияет на отсчеты воздушной скорости, вертикальной скорости, угла крена и угла тангажа по соответствующим приборам в кабине тренажера. Специальные самопишущие устройства наносят маршрут «полета» на карту. Ю. И. Кириленко

3529. Тренажеры для Канады (Flight simulators for Canada), Electronic Engng, 1954, 26, № 313, 105 (англ.)

См. реф. 3528. Сообщается о получении военно-воздушными силами Канады первого из десяти тренажеров, которые изготовляются для них лондонской фирмой «Редифон».

Обучаемому пилоту может быть представлена практически любая навигационная задача или аварийное положение. Кроме того, инструктор может вводить различные дополнительные задачи: пожар на различных участках самолета, повреждение в гидравлической системе, перебои в работе двигателя и системе подачи горючего, повреждение радиосредств.

О. В. Росницкий

3530. Авиационные тренажеры для Канады (Flight simulators for Canada), Electronics and Communs, 1954, 1, № 6, 18, 20 (англ.)

См. реф. 3528, 3529.

3531. Авиационный тренажер. Симпкин, Эмс (Flight simulators. Simpkin K. H., Emms E. T.), Electronic Engng, 1953, 25, № 305, 270—273 (англ.)

Популярное описание устройства современных авиационных тренажеров и некоторые исторические справки.

Устройство, имитирующее многомоторный самолет, стоит около 100 000 фунтов стерлингов, что, однако, окупается значительным сокращением расходов на обучение и эксплуатационных расходов. Приведены подробная блок-схема, а также схема передачи информации между блоками тренажера. Устройства такого же типа применяются для тренировки водителей автомашин. Возможно создать такие устройства для имитации вождения кораблей и полета ракет. О. К. Щербаков

3532. Авиационные тренажеры (Flight simulators), Flight, 1953, 64, № 2344, 843—845 (англ.)

Статья представляет собой сокращенное изложение лекции, прочитанной в Британском аэронавигационном обществе, о самолетных тренажерах, применяемых для обучения летного состава. В первой части приводятся данные об экономичности использования имитационного оборудования. Во второй части приводится описание и краткая оценка основных методов построения вычислительных устройств, имитирующих самолет. Делаются краткие замечания об учете в имитационной аппаратуре различных характеристик самолета, как то: влияние атмосферных условий, расхода горючего, герметизации кабины пилота, имитация характеристик различных моторов. Приводятся параметры целого ряда тренажеров. В. П. Парамонов

3533. Магнитное запоминающее устройство для хранения данных полетов самолетов (Drum storage for flight data), Aviat. Age, 1953, 20, № 5, 56—59 (англ.)

Описывается устройство для обработки и хранения планов полетов самолетов (РЖМат, 1955, 537). Дополнительно сообщается следующее. Первоначально предполагалось, что устройство будет обрабатывать и хранить такие данные полета, как время вылета, пункт назначения, количество горючего, трасса полета и т. д., но затем в план полета были включены сообщения о состоянии погоды, получаемые из различных пунктов страны. Устройство установлено на центральном аэропорте Администрации гражданской авиации в Индианаполисе, откуда посылает сведения в несколько аэропортов. Главным узлом устройства является магнитный барабан, на поверхности которого можно записать 900 000 элементарных магнитиков, что соответствует 2000 планам полетов. На 1 $см^2$ поверхности барабана умещается 200 элементарных магнитиков. Записывающие и считывающие головки расположены над частью поверхности барабана. Всего имеется 20 рядов головок в среднем по 23 головки в каждом ряду. Запись данных производится одновременно на несколько рядов. Это обеспечивает большую скорость заполнения барабана. Барабан имеет диаметр 55 *см* и длину 65 *см* и вращается со скоростью 1100 об/мин. Все устройство имеет 1900

электронных ламп, которые расположены на 156 субблоках 33 различных типов. Средний срок службы используемых ламп составляет 8000—9000 час. Устройство контролируется при понижении напряжения накала до 4,8 *в* на «шаговой» работе. При таком методе контроля полезное время доходит до 98%. Л. С. Легезо

3534. Новые применения вычислительных машин (Computers take on new chores), Electronics, 1953, **26**, № 9, 6, 8 (англ.)

Краткое сообщение о некоторых новых применениях вычислительных машин.

1. Магнитное запоминающее устройство для хранения и сравнения графиков полетов самолетов, разрешающее проблему управления воздушным сообщением (РЖМат, 1954, 4670; 1955, 537). Устройство хранит 2000 планов. Скорость считывания цифр 23 тыс. в 1 сек. Время выбора одного графика около 0,4 сек.

2. Вычислительная машина с магнитным барабаном (РЖМат, 1955, 1989, 2441) фирмы ИБМ (IBM). Машина имеет запоминающее устройство на магнитном барабане диаметром 10 *см* и длиной 30 *см*. Полная емкость запоминающего устройства 20 000 ячеек; машина может хранить до 2000 одноадресных инструкций. Машина предназначена для следующих операций: вычисление страховых премий, составление планов производства, приготовление счетов за коммунальные услуги. Одной из ее особенностей является наличие операции поиска данных из таблиц, которая облегчает автоматический выбор информации из налоговых таблиц.

Л. С. Легезо

3535. Система преобразования данных с перфоленты на перфокарты в вычислительном устройстве АМА. Грот (A tape-to-card converter for automatic message accounting. Groth W. B.), Bell Labs Rec., 1953, **31**, № 9, 333—340 (англ.)

В вычислительном устройстве АМА (РЖМат, 1953, 512; 1954, 3543), которое установлено фирмой «Белл» в 9 главных городах США, данные о телефонных переговорах записываются перед началом и после окончания телефонного переговора путем перфорации бумажной ленты на переговорных пунктах.

Ежедневно на переговорных пунктах перфолента отрезается и направляется в счетный центр АМА, где производится суммирование данных за месяц и печатание результатов подсчета для каждого абонента. Ранее обработкой полученных данных и окончательным составлением счетов занимался специальный персонал. Для автоматизации этого участка работы в 1951 г. был разработан преобразователь данных с перфоленты на перфокарты, позволивший получать данные о переговорах каждого абонента в виде перфокарты. Перфокарты затем подвергались дополнительной сортировке и обработке, производившейся ранее вручную, и, наконец, поступали на табулятор для печатания счетов.

В статье приведено подробное описание устройства преобразователя данных с перфоленты на перфокарты и система кодирования данных. Производительность преобразователя 100 карт в 1 мин. В. С. Бородин

См. также: 3002, 3442, 3449 **РЕЦ**